应用数学与数学文化

田治平　王德华　夏德昌　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内 容 简 介

将传统高等教学知识与（机械）问题相结合，以问题驱动的方式呈现，将实现以往高职教材的再创新，提高数学教学的效果。本书主要内容包括：函数的极限与连续，一元函数微分学及应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，线性代数，概率统计初步。

本书可作为职业院校“高等数学”课程教材，也可作为应用型本科及成人学习用书。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学与数学文化 / 田治平，王德华，夏德昌编著. —北京：电子工业出版社，2018.8

ISBN 978-7-121-34170-0

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①田… ②王… ③夏… Ⅲ. ①应用数学—高等学校—教材②数学—文化—高等学校—教材Ⅳ. ①O29②O1-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 088275 号

策划编辑：朱怀永
责任编辑：裴　杰
印　　刷：北京虎彩文化传播有限公司
装　　订：北京虎彩文化传播有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：19　字数：486.4 千字
版　　次：2018 年 8 月第 1 版
印　　次：2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：44.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，（010）88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254608，zhy@phei.com.cn。

前　言

数学不仅是一种知识，也是一种素质，即数学素质；数学不仅是一种工具，也是一种思维，即理性思维；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即数学文化。目前，人类进入信息时代，数学正悄无声息地走进人们的生活，引领科技的发展，推动社会的进步。可以说，信息时代本质上是数学时代，信息技术本质上是数学技术，使用数学的程度甚至成为衡量国家科学技术进步的主要标志。目前，高等职业教育快速发展，伴随着发展也产生了诸多前所未有的一系列问题，高职数学的教育问题首当其冲受到影响，如缺乏与本校人才培养目标高度适应的教材，培养目标及学生的差异使高职院校呈现传授与接受的“脱节”，教师教得辛苦，学生学得艰难，相当多的学生“学不会，用不了”，教学效果事倍功半。

进入 2017 年以来，山东科技职业学院以争创国家优质高职院校为统领，不断推进学院创新发展、特色发展，融合发展、共享发展、开放发展，进一步凝练了“知识传授，技能训练，创新实践，素质养成，价值积累”五位一体的人才培养体系，强调的是学生的专业能力、通用能力（主要指社会能力与方法能力，也称为关键能力）与职业素质的有效融合、共同发展。在数学教育方面，笔者认为，“五位一体”的要素就是要完善数学课堂的“知识传授，数学技能实训与数学应用实训，素质培养”，让学生真正地深入学习并有效地提升其综合素质与能力。

《应用数学与数学文化》是山东科技职业学院多年来数学教学改革后的系列校本教材之一，是学院的重点建设教材。本教材的编写思路是：通过分析高等职业教育机电（机械）类人才培养的普适性和培养对象的差异性，吸收国内外高等职业教育数学教学研究与改革的最新成果，从专业应用和素质培养的视角，采用“机电（械）专业问题与数学建模引入→基本知识点与专业案例融合→课堂综合实训→设置‘释疑问答’专节”的体例编写。

编写原则：定位高职、注重直观、弱化抽象、淡化技巧、强化应用、重在素质培养，关注“学历补充”和“接续培养”。从教材功能上看，主要有三方面：知识传授；课堂综合实训——专业应用实训、数学实验实训，素质培养；基本概念与方法的综合分析释疑。从内容上看，包括微分学、积分学、概率与统计、线性代数、常微分方程、数学文化六大模块。

该教材以数学教学改革成果为突破点实现了教材体系向教学体系的转换，主要体现在“与专业深度融合、课堂综合实训、数学能力与素质提升的问题驱动”的教学模式。本书的主要特色如下。

1．本书吸收了国内外近年来数学教学研究与改革的最新成果。

2．本书每章节开头首先从数学文化角度介绍相关知识点的起源与发展，然后引入专业问题与数学模型，将专业问题和数学建模思想融入教材。

3．本书章节中主要知识点与专业问题相机融合，有效的专业问题设计能驱动学生对相关知识的理解和建构。

4. 每个模块还单独设有“ 应用实训 ”一节。集中实践本章主要知识点在机电、机械专业及实际生活中的应用，强化学生数学知识的运用能力。

5. 关注学生在“ 学历补充 ”和“ 接续培养 ”等方面的需求，本书把每个模块中的重点、难点和容易产生疑惑的地方以问题驱动的方式呈现，即设置‘ 释疑问答 ’专节。激发学生对数学知识探究的乐趣，培养其自主学习的能力。

6. 本书还重点介绍当今数学技术应用与发展、数学品质、数学历史等数学文化，且贯穿融合于课程的始终。同时，有关知识点还与企业文化相机结合。通过这两项举措，可有效地提升学生的数学素养与职业素质。

参与本书编写的人员都是在高校从事高等数学教学与机电（械）专业教学 10 多年的一线优秀教师，经验丰富，编写的内容有许多地方都体现了他们的教学心得与体会。

该教材对于缺乏数学辅导教师的数学爱好者及理工科学生非常合适。

本教材由田治平、王德华、夏德昌编著，全书由田治平教授总体策划，王德华、夏德昌负责组织，具体编写分工如下：王德华、梁宏昌、周玉霞（电学教授）、李江红负责第一、二模块的编写；夏德昌、高玉静、苏建国（电学教授）、王金平教授负责第三、四模块的编写；李本图、杨燕飞、沈铁宏（机械学教授）负责第五模块的编写；田治平、施桂萍、沈铁宏负责第六、七模块的编写。

由于教材对高等数学内容调整幅度较大，缺乏应有的系统性，书中难免存在疏漏和不足，恳请读者批评指正。

编　者

2018 年 5 月

目　　录

第一模块　函数的极限及连续 ……001

第一节　函数的起源与发展 ……001
第二节　函数——变量之间依存关系的数学模型……003
第三节　应用实训 ……013
第四节　释疑问答 ……016
第五节　数列的极限 ……018
第六节　无限变化的函数模型——函数极限……024
第七节　无穷小量与无穷大量 ……028
第八节　极限的算术化——四则运算 ……032
第九节　两个重要极限 ……036
第十节　函数的重要特性——连续性 ……039
第十一节　释疑问答 ……046
第十二节　拓展实训 ……051

第二模块　一元函数微分学及应用 ……053

第一节　微分的发展与应用 ……053
第二节　函数的局部变化率——导数 ……055
第三节　求导法则 ……061
第四节　函数的微分及应用 ……065
第五节　微分中值定理 ……068
第六节　计算未定式极限的一般方法——洛比达法则……071
第七节　函数的性态分析——函数的单调性与极值……074
第八节　函数性态的进一步分析——函数的最值、凹凸性与曲率……080
第九节　应用实训 ……088
第十节　释疑问答 ……093
第十一节　拓展实训 ……096
数学实验二　Mathematica 在求函数的导数中的应用……097

第三模块　微分的逆运算——不定积分 ……099

第一节　积分的发展与应用 ……099
第二节　不定积分的概念与性质 ……100

第三节　直接积分法 ……103
第四节　第一类换元积分法（凑微分法） ……106
第五节　分部积分法 ……109
第六节　应用实训 ……112
第七节　释疑问答 ……114
第八节　拓展实训 ……116
数学实验三　Mathematic 在不定积分中的应用 ……118

第四模块　求总量或变化量的问题——定积分及其应用 ……119

第一节　定积分的概念 ……121
第二节　定积分的性质 ……125
第三节　牛顿-莱布尼茨公式 ……129
第四节　定积分的计算 ……133
第五节　应用实训 ……137
第六节　释疑问答 ……145
数学实验四　Mathematic 在定积分中的应用 ……147

第五模块　微分方程 ……149

第一节　微分方程的发展与应用 ……149
第二节　微分方程的基本概念 ……150
第三节　一阶微分方程 ……154
第四节　应用实训 ……159
第五节　释疑问答 ……165
数学实验五　Mathematic 在微分方程中的应用 ……169

第六模块　线性代数 ……171

第一节　线性代数的发展与应用 ……171
第二节　行列式的概念 ……172
第三节　行列式的性质 ……178
第四节　行列式的计算 ……182
第五节　克莱姆法则 ……185
第六节　行列式部分测试题 ……188
第七节　矩阵的概念与运算 ……191
第八节　矩阵的初等变换与矩阵的秩 ……199
第九节　逆矩阵 ……203
第十节　矩阵部分测试题 ……206
第十一节　线性方程组的解法 ……209
第十二节　线性方程组解的判定 ……213

第十三节　应用实训 …… 215
数学实验六　Mathematica 在求解行列式中的应用 …… 225

第七模块　概论统计初步 …… 227

第一节　概率论的起源与应用 …… 227
第二节　随机事件 …… 229
第三节　概率的统计定义与性质 …… 234
第四节　概率的常用公式 …… 240
第五节　事件的独立性与伯努利概型 …… 243
第六节　随机变量及其分布 …… 246
第七节　随机变量的期望和方差 …… 257
第八节　概率统计初步测试题 …… 263
第九节　应用实训 …… 267
第十节　释疑问答 …… 270

附录 A　标准正态分布数值表 …… 274

附录 B　x^2 分布数值表 …… 276

附录 C　常用积分公式 …… 277

附录 D　中学数学常用公式 …… 286

参考文献 …… 292

第一模块　函数的极限及连续

自然这部大书只能被那些通晓其中叙述语言的人所阅读．这种语言正是数学．

——伽利略（Galilei，1564—1642），意大利物理学家、数学家

【学习要求】

理解函数的起源与概念，掌握函数的表示方法与基本初等函数的图像性质；理解极限思想的起源与发展、掌握极限的概念及运算法则和求极限的方法；理解函数的连续性概念及性质，掌握函数连续性的判断．理解电学与机械学中常用函数所具有的性质及实际意义

第一节　函数的起源与发展

一、函数的起源与发展

（1）现在使用的函数一词由德国数学家莱布尼茨首先提出并使用．

Gottfried Wilhelm Leibniz（1646—1716 年），德国自然科学家、数学家、物理学家、历史学家和哲学家，一位举世罕见的科学天才，和牛顿（1643 年—1727 年）同为微积分的创建人，是第一个公开微积分方法的人，并且精心设计了非常巧妙简洁的微积分符号，沿用至今；牛顿是被确认早于莱布尼茨使用微积分的人．

（2）瑞士数学家欧拉（1748—1755 年）在数学著作中多次刻画过函数的概念，现在使用的函数符号 $y=f(x)$ 就是欧拉首先提出并使用的．

Leonhard Euler（1707 年—1783 年），他从 19 岁开始发表论文，直到 76 岁．他一生共写下了 886 本书籍和论文，其中在世时发表了 700 多篇论文．他常常抱着孩子在膝盖上完成论文．即使在他双目失明后的 17 年间，也没有停止对数学的研究，口述了好几本书和 400 余篇论文．当他写出了计算天王星轨道的计算要领后离开了人世．欧拉是数学符号的发明者，他创设的许多数学符号，例如 π，i，e，sin，cos，tg，Σ，$f(x)$等等，至今仍在沿用．

（3）法国数学家柯西在 1821 年，柯西著作中指出：……当变量之间联系起来的时候，若给定其中一个变量的值，其他变量的值就随着确定下来，这时这个变量就成为自变量，其他量就叫做这个自变量的函数．柯西不仅给出了函数的文字定义，而且给出了自变量的定义．

Cauchy，Augustin Louis（1789—1857 年）在数学领域，有很高的建树和造诣．很多数学的定理和公式也都以他的名字来命名，如柯西不等式、柯西积分公式．

（4）1837 年，德国数学家狄利克雷首先用单值对应的思想提出了新的函数定义：如果对于给定的区间上的每一个 x 值，有唯一的 y 值同它对应，那么 y 就是 x 的函数．

Dirichlet，Peter Gustav Lejeune（1805—1859 年）对数论、数学分析和数学物理有突出贡献，是解析数论的创始人之一．1837 年他提出函数是 x 与 y 之间的一种对应关系的现代观点．1839 年任柏林大学教授，1855 年接任 C.F.高斯在格丁根大学的教授职位．

1859 年，清代数学家李善兰（1811—1882 年）在翻译《代数学》时第一次将“ function ”

翻译成“ 函数 ”.

（5）用集合概念定义函数（函数的现代定义）：

康托尔，全名格奥尔格 · 康托尔（Georg Cantor，1845 年—1918 年），出生于俄国的德国数学家．创立了现代集合论作为实数理论以至整个微积分理论体系的基础.

康托尔的集合论得到公开的承认和热情的称赞，应该说是在瑞士苏黎世召开的第一届国际数学家大会上表现出来的．瑞士苏黎世理工大学教授胡尔维茨（1859—1919 年）在他的综合报告中，明确地阐述康托尔集合论对函数论的进展所起的巨大推动作用，这破天荒第一次向国际数学界显示康托尔的集合论不是可有可无的哲学，而是真正对数学发展起作用的理论工具．在分组会上，法国数学家阿达玛（1865—1963 年），也报告康托尔对他的工作的重要作用．至此，康托尔集合论思想得到广泛的研究和推广，我们今天函数的定义就是以此而产生的.

在可预见的未来，关于函数的争论、研究、发展、拓展将不会完结，也正是这些影响着数学及相邻学科的发展.

函数是高等数学中最重要的概念之一．在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，函数关系随处可见．微积分学是以函数关系为研究对象的．极限是研究函数和解决各种问题的一种基本方法.

二、函数与方程思想的应用

函数与方程思想是数学教学中的重要思想, 函数与方程的思想蕴含了深刻的哲学思想，这种思想的渗透与内化会使学生用发展的观点看待问题，透过现象看本质，善于发现事物之间存在的联系，动中求静，以静制动，以不变应万变，奋进中求安宁．这一思想方法与机械（电）专业课程及现实问题的有效结合，很多看似复杂的问题就会变得简单．如以下应用案例.

1．平面四杆机构

最简单的平面连杆机构由四个构件组成，称为平面四杆机构．含有两个移动副的四杆机构常称为双滑块机构，两个移动副不相邻的情况如图 1-1 所示.

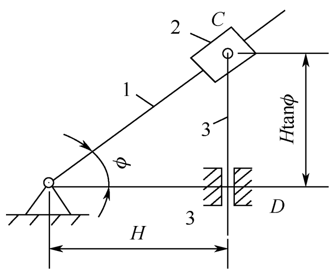


图 1-1

图 1-1 中, 从动件 3 的垂直位移与原动件 1 转角ϕ的正切值成正比, 故又称为正切机构，位移表达式已标注在图上.

双滑块机构中的两个移动副也可以相邻，其中一个移动副与机架相关联的情况如图 1-2 所示.

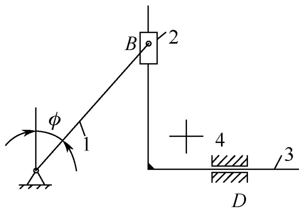


图 1-2

请运用初等函数中的三角函数知识, 分析从动件 3 的水平位移与原动件 1 转角φ的关系, 并写出函数表达式[答案见本模块第三节].

2. 人造卫星测控站的优化分布模型[答案见本模块第三节]

问题提出　地面监控站的主要任务是测量和控制人造卫星的姿态和轨道运动，测量人造卫星的各种工程参数和环境参数，对人造卫星实施各种功能状态控制，与广播卫星的遥测遥控跟踪系统结合，测控人造卫星的轨道位置和姿态，对人造卫星实施各种功能和状态的切换.

这种测控是航天系统中的一个非常重要的环节，理想的状态是对人造卫星进行全程跟踪监控，地面测控站只能观测到所在点切平面以上的空域，且在与地平面夹角 3°的范围内测控效果不好，实际上每个测控站的测控范围只考虑与地平面夹角 3°以上的空域，在一个人造卫星的运行过程中，往往需要多个测控站联合完成测控任务.

在所有测控站都与人造卫星的运行轨道共面的情况下，至少应该建立多少个测控站才能对其进行全程跟踪测控？

第二节　函数——变量之间依存关系的数学模型

数形诗

数形本是相倚依，焉能分作两边飞.
数缺形时少直觉，形少数时难入微.
数形结合百般好，隔离分家万事非.
几何代数统一体，永远联系莫分离.

——我国著名数学家华罗庚（1910—1985 年）

学习内容：函数的概念

目的要求：熟练掌握函数的定义、定义域、对应法则，了解分段函数、显函数、隐函数、反函数的概念，熟练掌握函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性及 5 种基本初等函数的图像和性质；掌握复合函数的复合过程．理解电学与机械学中常用函数所具有的性质及实际意义.

重点难点：函数定义域的求法，复合函数的复合过程，电学与机械学中的常用函数.

一、函数概念

世间万物皆是不断变化的，如人的生老病死，大海的潮涨潮落，经济市场的瞬息万变等，无不体现了一个永恒的真理，不变是相对的，变是绝对的，如何描述各种现象的变化

规律？如何预测其变化趋势？函数是反映这些客观规律的重要模型，它告诉我们不同的量在某个过程中的内在联系，以及它们的变化规律，通过对这些函数模型的分析可以预测各种相关量的变化趋势，这正是我们将要介绍的两个重要概念——函数与极限.

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集．若对于每一个数 $x \in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y = f(x), x \in D .$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**；数集 D 称为该函数的**定义域**，是 x 的取值范围.

自变量取定义域内某一值时，因变量的对应值叫做函数值．对于给定的函数 $y = f(x)$，当函数的定义域 D 确定后，按照对应法则 f，因变量的变化范围也随之确定．函数值的集合叫做函数的**值域**．所以**定义域和对应法则就是确定一个函数的两个要素**．两个函数只有在它们的定义域和对应法则都相同时，才是相同的.

函数的三种表示方法：解析式、列表法、图像法.

公式法（解析式）的优点：① 简明精确地概括了变量间的关系；② 可以通过公式求出任意一个自变量所对应的函数值．中学阶段所研究的主要是用公式表示的函数.

图像法的优点：直观形象地表示自变量与因变量的变化趋势，有利于通过图像来研究函数的性质.

列表法的优点：不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值，简洁明了.

【衔接专业】

电工学与企业经营中常出现以不同方法表示的函数，例如：

公式法：正弦函数 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ 常用来描述交变电流和电压，如以电流 $i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi)$ 为例，它由角频率、振幅和初相位三要素决定．因此，只要能确定这三个要素，那么正弦量就确定了．i 称为称为正弦交流电的瞬时电流值，I_{m} 称为正弦交流电的最大值（幅值），ω 为角频率、φ 为相位，其中 I_{m}、ω、φ 为常量，且 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$，$f = \dfrac{1}{T}$．例如，我国工业和民用电频率 $f = 50\mathrm{Hz}$，周期 $T = 0.02\mathrm{s}$，角频率 $\omega = 2\pi f$．

表格法：某汽车销售公司 2016 年度各月份的汽车销量（单位：辆），如表 1-1 所示.

表 1-1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销量 y	750	800	602	799	905	567	432	673	653	756	974	769

表 1-1 确定了月份 x 与销量 y 这两个变量之间的统计关系，不同的月份都有唯一确定销量 y 与之对应.

图像法：理想电压源的伏安特性曲线（见图 1-3），实际电压源的伏安特性曲线（见图 1-4）.

伏安特性曲线常用横坐标表示电流 i、纵坐标表示电压 u，以此画出的 i-u 图像叫作导体的伏安特性曲线图．这种图像常被用来研究导体电阻的变化规律，是电工学常用的图像之一.

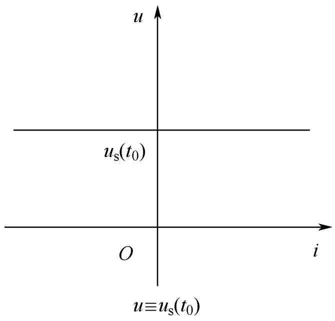


图 1-3

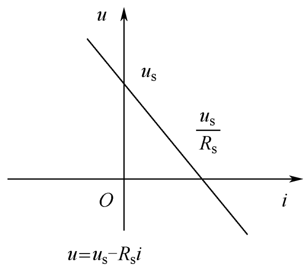


图 1-4

例题 1　求下列函数的定义域

（1） $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$；　　（2） $y=\ln(x+1)+\arccos(x-1)$.

解　（1）由分母不为零且被开方数大于等于零可知，自变量 x 应满足 $x^2-x-2>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-1$，故原函数的定义域为：$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

（2）该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases} x+1>0 \\ -1\leq x-1\leq 1 \end{cases}$$

的 x 的全体，解不等式组得 $0\leq x\leq 2$，故原函数的定义域为：$[0,2]$.

2. 分段函数

对于自变量的不同取值范围，有对应法则也不同的函数，称为**分段函数**.

注意：

① 分段函数是一个函数，而不是几个函数；

② 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

例如，$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$，$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x\leq 5 \\ 0, & x=0 \\ -1, & -5<x<0 \end{cases}$，符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$

等，都是分段函数.

例题 2　设 $f(x)=\begin{cases} x-2, & 1\leq x<3 \\ x^2, & 3\leq x<5 \end{cases}$，　求$f(x+1)$.

解： $f(x+1)=\begin{cases} (x+1)-2, & 1\leq x+1<3 \\ (x+1)^2, & 3\leq x+1<5 \end{cases}=\begin{cases} x-1, & 0\leq x<2 \\ (x+1)^2, & 2\leq x<4 \end{cases}$.

【衔接专业】电工应用

例题 3　蔡氏电路是一种非线性电路，1983 年由学者蔡少棠发明，第一次在混沌理论和混沌电路之间架起了桥梁. 蔡氏电路的核心是一个称为“蔡氏二极管”的分段性电阻.

一种改进的基于符号函数的蔡氏电路中，蔡氏二极管的状态方程为：

$$f(x)=m_1x+(m_0-m_1)\operatorname{sgn} x$$

其中包含了符号函数 $\operatorname{sgn} x$. 符号函数的物理电路图如图 1-5 所示.

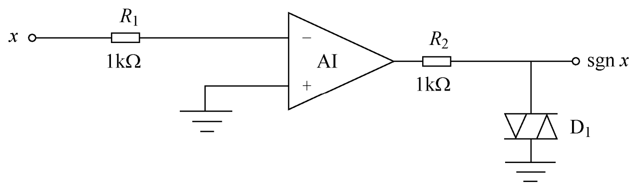


图 1-5

3．显函数和隐函数

若函数中的因变量 y 用自变量 x 的表达式直接表示出来，这样的函数称为**显函数**.

有些函数的表达方式却不是这样．例如方程 $x+y^3-1=0$ 表示一个函数，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，y 都有唯一确定的值与之对应.

一般地，若两个变量 x,y 的函数关系用方程 $F(x,y)=0$ 的形式来表示，即 x,y 的函数关系隐藏在方程里，这样的函数叫做**隐函数**.

有的隐函数，可以从方程 $F(x,y)=0$ 中解出 y 来化为显函数，但有的隐函数化为显函数比较困难，甚至是不可能的．例如由方程 $xy-\mathrm{e}^{x+y}=0$ 确定的隐函数就不能化为显函数.

4．反函数——逆向思维的实例

设函数 $y=f(x),x\in D$， $y\in Z$ 且变量 x 与 y 是一一对应的，若果把 y 当作自变量，x 当作因变量,则关系式 $x=\varphi(y)$，$y\in Z$，这时 x 是以 Z 为定义域的 y 的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的直接反函数；而函数 $y=\varphi(x)$称为函数 $y=f(x)$ 的间接反函数，记做 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z$．

通常所说的反函数是指间接反函数 $y=f^{-1}(x),x\in Z$ 今后凡不特别说明,函数 $y=f(x)$ 的反函数都是这种改写过的 $y=f^{-1}(x),x\in Z$ 形式.

函数 $y=f(x),x\in Z$ 与 $y=f^{-1}(x),x\in Z$ 互为反函数，它们的定义域与值域互换.

在同一直角坐标系下， $y=f(x),x\in Z$ 与互为反函数 $y=f^{-1}(x),x\in Z$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例题 4 函数 $y=3x-2$ 与函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$ 互为反函数，如图 1-6 所示；函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，如图 1-7 所示，它们的图形都是关于直线 $y=x$ 对称的.

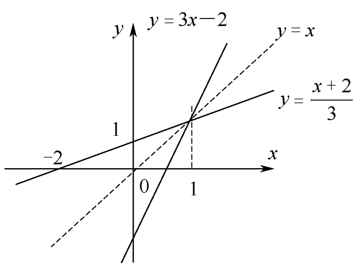


图 1-6

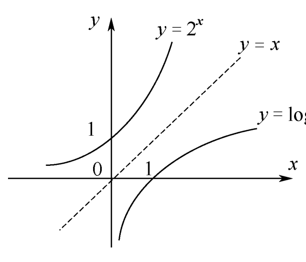


图 1-7

定理 1 （反函数存在定理） 单调函数必有反函数，且单调增加（减少）的函数的反函数也是单调增加（减少）的．求函数 $y=f(x)$ 的反函数可以按以下步骤进行：

（1）从方程 $y=f(x)$ 中解出唯一的 x，并写成 $x=f^{-1}(y)$ ；

（2）将 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x,y 对调，得到函数 $y=f^{-1}(x)$，这就是所求的函数的反函数.

【衔接专业】信息安全中的数学模型

已知一个明文通过一种对应法则 f 得到的密文是 MEQEFSC，要解开密文必须知道对应法则 f 的反对应法则 g. 设反对应法则 g 是：根据英文字母排列顺序，密文每个字母往左数第四个字母为对应的明文，试写出明文.

解　根据英文字母排列 **A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z** 及已知条件得明文为

I　AM　A　BOY

5. 复合函数

假设有两个函数 $y=f(u),u=\varphi(x)$，与 x 对应的 u 值能使 $y=f(u)$ 有定义，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$，得到函数 $y=f(\varphi(x))$. 这个新函数 $y=f(\varphi(x))$ 就是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 经过复合而成的**复合函数**，称 u 为中间变量.

例如由 $y=f(u)=\mathrm{e}^u,u=\varphi(x)=\cos x$ 可以复合成复合函数 $y=\mathrm{e}^{\cos x}$.

复合函数不仅可用两个函数复合而成，也可以由多个函数相继进行复合而成. 如由 $y=\sqrt{u},u=\ln v,v=\sin x$ 可以复合成复合函数 $y=\sqrt{\ln\sin x}$；由 $y=f(u)=\mathrm{e}^u,u=\varphi(x)=\cos x$ 可以复合成复合函数 $y=f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{\cos x}$.

注意：不是任何两个函数都能复合成复合函数. 由定义易知，只有当 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空时，这两个函数才能复合成复合函数. 例如函数 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u=-x^2$ 的值域为 $(-\infty,0]$，而 $y=\ln u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，显然 $(-\infty,0]\bigcap(0,+\infty)=\varnothing,y=\ln(-x^2)$ 无意义.

- 复合函数分解为简单函数的步骤

第一步：确定外层函数 $y=f(u)$（y 是 u 的函数）

第二步：确定内层函数 $u=\varphi(x)$（u 是 x 的函数）

- 复合函数分解为简单函数的标准

（1）基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）

（2）基本初等函数的四则运算

（3）特别注意多项式函数. 如，一次多项式函数 $ax+b$，二次多项式函数 ax^2+bx+c 等.

【衔接专业】指出下列电工学中的函数由哪些简单函数复合而成？

（1）$s(t)=\sin(2\pi t+\dfrac{\pi}{3})$　（2）$\varepsilon(r)=\arcsin(1-r^2)$　（3）$i(t)=\mathrm{e}^{-2t}$

解（1）$s(t)=\sin(2\pi t+\dfrac{\pi}{3})$ 是由 $s=\sin u$，$u=2\pi t+\dfrac{\pi}{3}$ 复合而成的.

（2）$\varepsilon(r)=\arcsin(1-r^2)$ 是由 $\varepsilon=\arcsin u$，$u=1-r^2$ 复合而成的.

（3）$i(t)=\mathrm{e}^{-2t}$ 是由 $i=\mathrm{e}^u$，$u=1-r^2$ 复合而成的.

二、函数性质

1. 单调性

设有函数 $y=f(x),x\in(a,b)$，若对任意两点 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，总有

（1）$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是**单调增加**的，区间 (a,b) 称为单调增加区间；

（2）$f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是**单调减少的**，区间 (a,b) 称为单调减少区间.

单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**，单调增加区间和单调减少区间统称为**单调区间**.

【衔接专业】

图 1-3 是理想电压源的伏安特性曲线，它是一条平行于 i 轴且纵坐标为 $u_s(t_0)$ 的直线，意味着随电流 i 的增加电压没有改变，即理想电压源的端电压与电流大小无关.

图 1-4 是实际电压源的伏安特性曲线，它是一条向右下方倾斜的直线，说明在实际电路中，随着电流 i 的增加，电压源的端电压 u 在逐渐降低，电压 u 是关于电流 i 的单调递减函数.

2. 有界性

设函数 $y=f(x), x\in D$，如果存在 $M>0$，使得对任意 $x\in D$，均有 $|f(x)|\leq M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是无界的.

例如 $y=\sin x$ 是有界函数，其中对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $|\sin x|\leq 1$；而 $y=x^2$ 是无界函数，因 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅有下界.

【衔接专业】如图 1-8 所示，已知正弦交流电的电流强度 i，随时间 t（单位：s）变化的部分曲线. 试讨论电流强度的周期性、有界性.

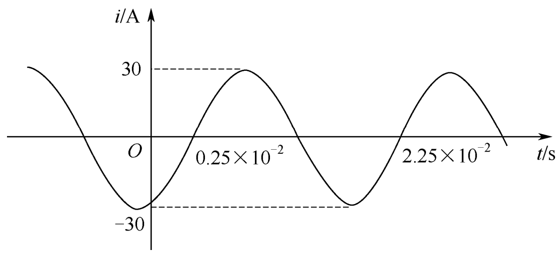


图 1-8

解 电流强度的周期

$$T = 2.25\times10^{-2} - 0.25\times10^{-2} = 2\times10^{-2}\ (\mathrm{s})$$

电流强度为有界函数，$|i|\leq 30\ (\mathrm{A})$.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域内的 x 都有：

（1）$f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；

（2）$f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

（3）奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

（4）如果函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，称为非奇非偶函数.

例如，$y=\sin x, y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$ 是奇函数；$y=\cos x, y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是偶函数.

【衔接专业】图 1-9 和图 1-10 展示了 MATLAB 软件绘制的正弦信号与余弦信号的图形，可见正弦信号为奇函数，余弦信号为偶函数（MATLAB 软件中的英文变量全为正体）.

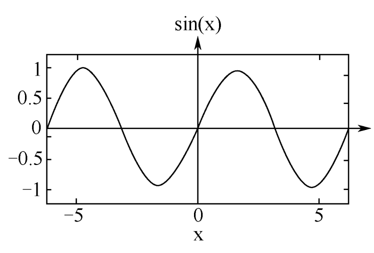


图 1-9

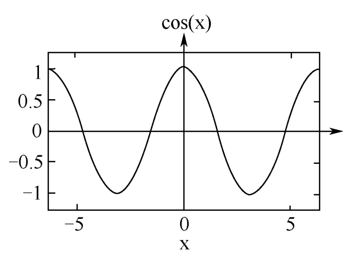


图 1-10

4．周期性

设函数 $y=f(x),x\in D$，如果存在常数 $T\neq 0$，对任意 $x\in D$，$f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数；使上式成立的最小正数 T，称为函数 $y=f(x)$ 的最小正周期，简称周期．例如，$y=\sin x, y=\cos x$ 的周期 $T=2\pi$，$y=\tan x, y=\cot x$ 的周期 $T=\pi$，正弦型曲线函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$．

【衔接专业】

图 1-11 所示信号的周期 $T=\pi$．图 1-12 所示方波信号的周期 $T=2$．图 1-13 所示信号的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$．

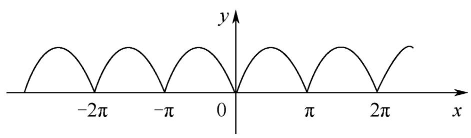


图 1-11

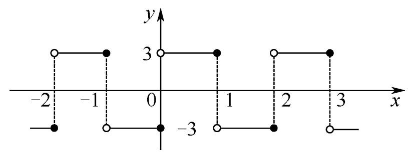


图 1-12

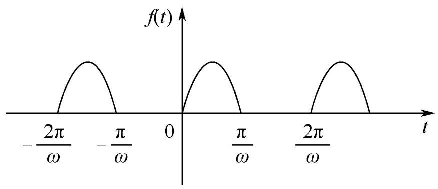


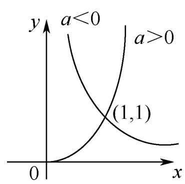
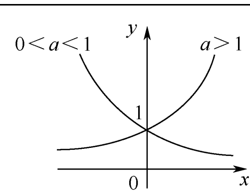
图 1-13

三、基本初等函数

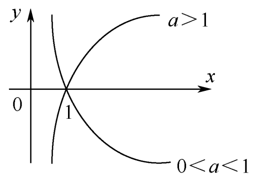
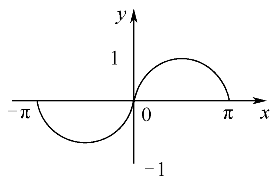
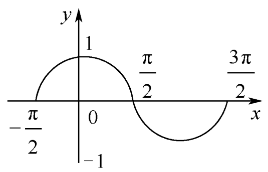
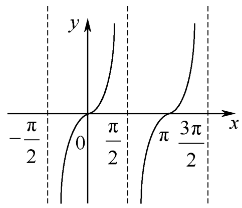
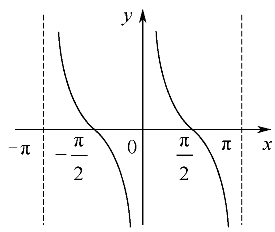
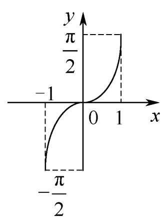
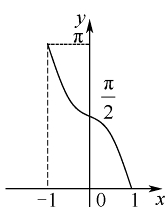
常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**．

为适应本书的需要，现将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这 5 类基本初等函数的表达式、定义域、性质以及图像归纳成表 1-2，供同学们学习使用．

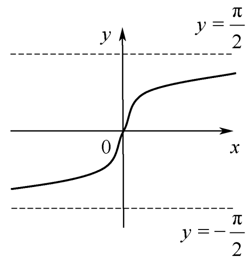
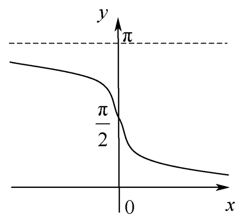
表 1-2

序号	函　数	图　像	性　质
1	幂函数 $y=x^a, a\in R$		在第一象限，$a>0$ 时函数单增；$a<0$ 时函数单减．都过点（1，1）
2	指数函数 $y=a^x$ $(a>0且a\neq 1)$		$a>1$ 时函数单增；$0<a<1$ 时函数单减． 共性：过（0，1）点，以 x 轴为渐近线

续表

序号	函　数		图　像	性　质
3	对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0且a\neq1)$			$a>1$ 时函数单增；$0<a<1$ 时函数单减. 共性：过（1，0）点，以 y 轴为渐近线
4	三角函数	正弦函数 $y=\sin x$		奇函数，周期 T=2π，有界 $\lvert\sin x\rvert\leq1$
		余弦函数 $y=\cos x$		偶函数，周期 T=2π，有界 $\lvert\cos x\rvert\leq1$
		正切函数 $y=\tan x$		奇函数，周期 T=π，无界
	三角函数	余切函数 $y=\cot x$		奇函数，周期 T=π，无界
5	反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$		$x\in[-1,1], y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，奇函数，单调增加，有界
		反余弦函数 $y=\arccos x$		$x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$，单调减少，有界

续表

序号	函　数		图　像	性　质
5	反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，奇函数，单调增加，有界，$y=\pm\frac{\pi}{2}$ 为两条水平渐近线
		反余切函数 $y=\operatorname{arc}\cot x$		$x\in(-\infty,+\infty),y\in(0,\pi)$，单调减少，有界，$y=0,y=\pi$ 为两条水平渐近线

【数形结合思想】数形结合思想是指在处理问题时，将抽象的语言与直观的几何图形有机地结合起来思索，促使抽象思维与形象思维和谐复合．化抽象为直观，化直观为精确．

在机电设备与维修这个专业，制冷方式有许多，就拿最常见的单极蒸汽压缩式制冷循环来说，我们首先应该了解的是它的循环中的组成部分及各部分的功能，然后画出它的循环图，单从这方面去了解它，很可能是“丈二和尚——摸不着头脑”，这时我们就必须辅之以压-焓图、温-熵图（函数图像）来使我们更加准确地了解在此循环中的各个工作点的工作状态及其工作变化，这样会使此循环更加明了、更加清晰，使我们能游刃有余地运用它．

四、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的，并能用一个式子表示的函数，统称为初等函数．

初等函数的本质就是一个函数．为了研究需要，今后经常要将一个给定的初等函数看成由若干个简单函数经过四则运算或复合而成的形式．简单函数是指基本初等函数，或由基本初等函数经过有限次四则运算而成的函数．

本课程研究的函数，主要是初等函数．凡不是初等函数的函数，皆称为非初等函数．

【对数简史】

15 世纪至 16 世纪，天文学得到了较快的发展，为了计算星球的轨道和研究星球之间的位置关系，需要对很巨大的数据进行乘、除、乘方和开方运算．由于数据太大，为了得到一个结果，常常需要运算几个月的时间，冗繁的运算使科学家烦恼，能否找到一种简便的计算方法呢？数学家们在探索和思考，如果能用简单的加减运算来代替复杂的乘除运算那就太好了！直至 16 世纪末 17 世纪初，苏格兰数学家纳皮尔发明了对数，才彻底解决了这一运算难题．恩格斯对对数的发明给予了高度的评价，他认为：“对数的发明与解析几何的产生、微积分的创始同为 17 世纪数学的三大成就．”

五、关于函数概念的理解

本节的中心内容是函数概念，对于函数概念的理解程度将会影响到微积分的学习，甚至涉及概率论与数理统计部分. 掌握函数概念的关键在于理解函数关系 $y=f(x),x\in D$，在本质上函数关系 $y=f(x),x\in D$ 是两个变量相互依存的运算结构，而自变量的变化影响着因变量的变化. 自变量可以是一个变量，也可以是一个函数形式，因此就有了基本初等函数和复合函数. 通过图 1-14 来说明函数形式、基本初等函数和复合函数.

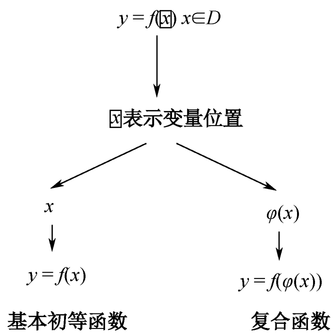


图 1-14

习题 1-2

1. 求下列函数的定义域：

（1） $y=\sqrt{2x+1}$ ；　　（2） $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ ；

（3） $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x^2-9}$ ；　　（4） $y=\ln(x^2-4)$

2. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^x$， 求 $f(0),f(2),f(x^2),f(f(0)),f(f(x^2))$.

3. 求下列函数的反函数：

（1） $y=3x-2$ ；　　（2） $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ ；

（3） $y=\sqrt[3]{2x-1}$ ；　　（4） $y=1-x^2(x<0)$.

4. 下列函数是由哪几个简单函数复合而成的？

（1） $y=\sin x^3$ ；　　（2） $y=\ln\sin x$ ；

（3） $y=\cos\sqrt{x+1}$ ；　　（4） $y=\mathrm{e}^{\sin 2x}$ ；

（5） $y=(3+x+2x^2)^3$ ；　　（6） $y=\sin^2(1+2x)$ ；

（7） $y=\ln\ln\sin x$ ；　　（8） $y=\sqrt{\ln 2x}$.

第三节 应用实训

函数是高等数学中最重要的概念之一．在用数学方法解决实际问题时，经常要建立关于实际问题的数学模型，即将问题涉及的变量之间相互依赖的关系用数学公式表示出来，也就是建立各变量之间的函数关系；建立数学模型的目的有两个，① 利用模型来解释实际问题，② 利用模型对实际问题的未来做预测；由此可见建立数学模型的重要性．本节主要介绍函数在电工学、机械学中的数学模型，可使同学们进一步理解函数的实质，提高分析问题、解决问题的能力．

一、正切机构和正弦机构的位移

例题 1 [见本模块第一节函数与方程思想的应用]

解 从动件 3 的水平位移 x 与原动件 1 的杆长 L 和转角 φ 有关，并且与原动件 1 转角 φ 的正弦成正比，其函数表达式为 $x=L\sin\varphi$.

二、人造卫星测控站的优化分布模型

（1）问题提出[见本模块第一节函数与方程思想的应用]

（2）问题的解决：

所有人造卫星的运行轨道平面都通过地心，为使问题简单化，不妨假设地球是球形的，人造卫星的运行轨道是圆形的，根据题意，地面监控站与人造卫星运行轨道共面，如图 1-15 所示，其中内圆表示的是地球表面，外圆为人造卫星或飞船的运行轨道，O 为地球的球心，A 为地面一测控站．

此题要求全程测控且测控站的数量最少，即要使每个测控站所测控到的范围都尽可能大．我们以其运行轨道上的任一点 P 入手分析，当分散在两侧的两个测控站的监测交点恰好与此点重合时，恰好能保证这两个测控站都发挥了它们的最大测控范围，如果测控交点的高度低于此点所在的运行轨道时，两个测控站监控的范围就产生重叠效应；相反，当交点高于此点所在的运行轨道时，会造成测控盲区，致使有一段轨道因为落于两侧控交点的下方而未被测到，显然此问题与人造轨道至地表的高度有关（不妨设此高度为 h），可以通过求出每个测控站测控范围的夹角 β，从而利用一周 2π 与 β 之比求解出需要建立多少测控站．

利用正弦定理可得 $\dfrac{h+R}{\sin(\angle PAO)}=\dfrac{R}{\sin\alpha}$

已知地球半径 $R=6400\text{km}$，$\angle PAO=90°+3°=93°$，可解得

$$\alpha=\arcsin(\frac{6391}{h+6400})$$

$$\frac{\beta}{2}=\frac{87°}{180°}\pi-\arcsin(\frac{6391}{h+6400})$$

$$\beta=\frac{174°}{180°}\pi-2\arcsin(\frac{6391}{h+6400})$$

利用 β 求 N 值

$$N=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\frac{174°}{180°}\pi-2\arcsin(\frac{6391}{h+6400})}$$

测控站建立的数目是与轨道距地表的高度 h 有关的一个函数，若依神舟七号飞船为研究对象，此时 $h=343\text{km}$，可以得到 $N=11.54$，即在讨论神州七号飞船时需要建立 12 个测控站.

此题是在地面测控站与人造卫星的运行轨道共面的前提下，就问题进行研究的，实际上共面的假设仅适用于一种情况，即当人造卫星运行轨道与赤道的倾角等于 0 °时（此时人造卫星的运行轨道称为赤道轨道），当人造卫星的运行轨道与赤道的倾角大于 0 °时，由于地球的自转，人造卫星在运行过程中相继两圈的经度有一些差异，这就使地面测控站与人造卫星的运行轨道不再共面，问题就变得复杂了很多，学习者可以自行参考.

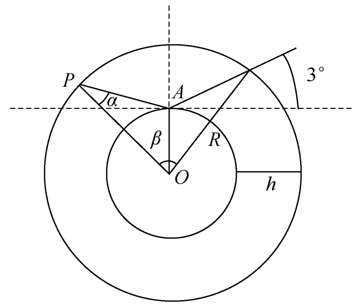


图 1-15

三、电容器电压问题

例题 2 电容器连接直流电源充电时，电容器的电压随时间变化的规律是

$$U_{\text{C}}(t)=E(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})$$

如图 1-16 所示，其中 E 是电源的电动势，R 是电阻，C 是电容，均为常数.

电容器放电时，电容器的电压随时间变化的规律是

$$u_{\text{C}}=E\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

以上两个函数均是指数函数，它们都以无理数 e 为底数，而且指数总取负值.

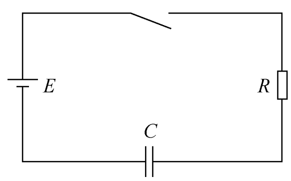


图 1-16

四、感抗问题

线圈的电感对交变电流有阻碍作用，阻碍作用的大小称为感抗，用 X_{L} 表述．在交变电路中，线圈的电感作用类似于电阻．感抗的大小由线圈的电感 L 和交变电流的频率 f 共同决定，表达式为 $X_{\text{L}}=2\pi fL$，线圈的电感越大，交变电流的频率越高，感抗就越大.

例题 3 某检波器输出端的中频扼流圈的电感 $L=14\mu\text{H}$ （电感的单位：亨[利]（H)、微亨（μH）)，交变电流的频率为 30Hz，问扼流圈的感抗等于多少？

解 已知 $L=14\mu\text{H}=14\times10^{-6}\text{H}$， $f=30\text{MHz}=30\times10^{6}\text{Hz}$，代入感抗公式，有

$$\begin{aligned}X_{\text{L}}&=2\pi fL=2\times3.14\times30\times10^{6}\times14\times10^{-6}\\&=2\times3.14\times30\times14\\&\approx2637.6(\Omega)=2.6376(\text{k}\Omega)\end{aligned}$$

所以，该中频扼流圈的感抗为 $2.6376\mathrm{k\Omega}$.

五、电感功率问题

在交流电中，电感两端的电压不是固定值，而是一个随电流大小变化的正弦函数，电感的功率计算公式为

$$p_{\mathrm{L}} = u_{\mathrm{L}} \cdot i$$

例题 4　已知在正弦交流电中，电感两端的电压为 $u_{\mathrm{L}} = \sqrt{2}U_{\mathrm{L}}\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}} + 90°)$，电流强度为 $i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}})$，求 P_{L}

解

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{L}} &= u_{\mathrm{L}} \cdot i = \sqrt{2}U_{\mathrm{L}}\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}} + 90°) \cdot \sqrt{2}I\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) \\ &= \sqrt{2}U_{\mathrm{L}}\cos(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) \cdot \sqrt{2}I\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) \\ &= IU_{\mathrm{L}}\sin 2(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) \end{aligned}$$

六、脉冲电压问题

常见的脉冲形状有矩形脉冲、方波脉冲、尖脉冲、锯齿脉冲、阶梯脉冲、间歇正弦脉冲等，脉冲电压具有突变性和不连续性.

例 5　如图 1-17 所示为一个单三角脉冲电压的波形图，试确立电压与时间的函数关系.

解　从图 1-17 中可以看出，脉冲电压 U 随时间 t 的变化规律需要分段进行考察. 求得 U 随时间 t 变化的关系式为

$$U \begin{cases} \dfrac{2E}{t_0}t, & 0 \leq t < \dfrac{t_0}{2} \\ \dfrac{2E}{t_0}(t - t_0), & \dfrac{t_0}{2} \leq t < t_0 \\ 0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

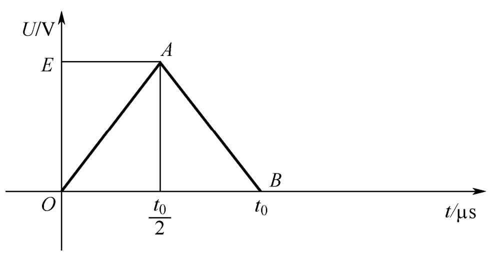


图 1-17

七、信息加密问题

为了保证信息的安全传输，有一种密码系统，其加密原理为：发送方将明文按照秘匙规定的加密方式转化成密文发送出去，接收方接收后再按照秘匙将密文转化成明文.

例题 6　已知秘匙为 $y = x^a\,(a > 0$ 且 $a \neq 1)$，又知道“ 4 ”通过加密后得到密文为“ 2 ”. 现在接收方接收到的密文为“ $\dfrac{1}{6}$ ”，问解密后得到的明文是什么？

解 由题意知，加密秘匙为 $y=x^a(a>0$ 且 $a\neq 1)$，“4”通过加密后得到密文为“2”，即 $x=4$ 时，$y=2$，代入有 $2=4^a$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$，所以秘钥为幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$.

又由接收方收到的密文“$\dfrac{1}{6}$”，即已知 $y=\dfrac{1}{6}$，代入秘钥得 $\dfrac{1}{6}=x^{\frac{1}{2}}$，解得 $x=\dfrac{1}{36}$，所以解密后得到的明文是 $\dfrac{1}{6}$.

该例说明加密解密的过程与幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 紧密相关．变量之间的这种对应规律在雷达的各个分机中也经常遇到，如雷达电路中的二极管与三极管，阳极电流 i 与阳极电压 u 之间的对应规律为 $i=ku^{\frac{3}{2}}$（k 为常数），这种对应关系就是幂函数.

第四节　释疑问答

问题 1　函数可以用数学运算公式表示、用列表法和图示法表示，它们的函数关系 f 是什么意思？

由函数的定义可知，函数关系 f 就是自变量与因变量的对应关系．无论什么方式所表达的函数，我们都可借助直观图像来加深对函数关系 f 的理解，现将函数关系 f 比作一部“数值机器”，把定义域中的每一个数值 x 输入“数值机器”中，通过 f 的“作用”，输出来的就是值域中的函数值（见图 1-18）

例如：多项式函数 $f(x)=x^5-2x^3+3x^2-1$ 的函数关系 f 是什么意思？

观察上式右端，给定一个 x 的值，通过对应关系 $(\ \ )^5-2(\ \ )^3+3(\ \ )^2-1$

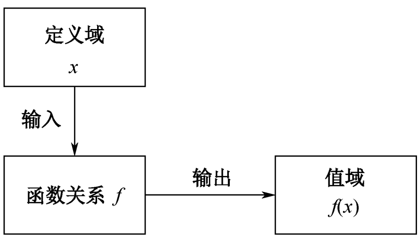


图 1-18

确定函数的一个值，因此，函数的关系 f 是：$(\ \ )^5-2(\ \ )^3+3(\ \ )^2-1$

又如函数：
$$f(x)=\log\sin(3x+1)$$

其函数关系 f 是下列运算：
$$\log\sin[3(\ \ )+1]$$

即对给定 x 的一个值，先乘以 3 再加 1，取 sin，最后再取 log，而得到函数的值．这里，我们把 sin、log 都看成数学运算．以后把指数、对数、三角函数及反三角函数都看成数学运算.

因此，由一个数学解析式表示的函数，其函数关系式 f 是一系列的数学运算.

由一个列表法表示的函数，它的函数关系 f 就是表中所反映的对应规律.

由一个图示法所表示的函数，它的函数关系 f 就是图形所反映的对应规律.

问题 2　函数的定义域与函数关系 f 有什么关系？

我们从分析具体函数入手，如函数

$$y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$$

的定义域是 $a\le x\le b$. 之所以不能取 $x<a$ 或 $x>b$，是因为受函数关系 $f:\sqrt{[(\ )-a][b-(\ )]}$ 的限制.

又如，自由落体函数：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

定义域：t 从下落的时刻 t_0 直到着地时刻 t_1 为止，

即：$t_0\le t\le t_1$.

这就是说，函数的定义域是由所讨论问题的实际情况所决定的.

综述：对于不涉及实际问题的初等函数，它的定义域由其函数关系确定；但对于实际问题和特定问题来说，函数的定义域由所讨论问题的实际情况确定.

问题 3　对于 x 的同一值，y 取不同的值是不是函数？

如函数：

$$y=\pm\sqrt{x}$$

由函数的定义，对于 x 的一个值，对应 y 的一个确定的值，现在对应两个，所以它不是函数. 若将函数定义稍加推广，允许对于 x 的一个值对应 y 的一个或两个以上的值，则这个推广以后的函数称为多值函数，此处，$y=\pm\sqrt{x}$. 是多值函数，对于多值函数，以后我们研究它的单值分支，$y=\sqrt{x}$ 或 $y=-\sqrt{x}$.

问题 4　如何理解企业文化是企业竞争力的函数.

若把函数的定义域与值域拓展到非数值集合，企业所有规则的集合用 A 表示（注：规则代表了企业竞争力），即 $A=$｛企业规则｝；企业文化为：零投诉. 即用集合 $B=$｛零投诉｝表示，集合 A 中的每一项规则（每一个元素）都为了：零投诉，即都对应 B 中唯一一个元素：零投诉. 由此可见，这个对应 f 是集合 A 到 B 的一个函数. 因此可以说，企业文化就是企业竞争力的函数. 在企业运作中，集合 A 与集合 B 都是优化的对象. 建立企业规则 A 与企业文化 B 的数据库，优选最佳对应关系 f，是优秀企业家一生高度关注的重要工作之一.

【数学历史】

发展中的数学

何谓“数学”？随机向人们提问，你可能获得的答案是“数学是有关数字的一门学问”. 但这种答案无法体现当今数学已经在很大程度上贯穿我们日常生活和社会大部分活动的真实现象. 其实，这样一种关于数学的描述，在大约两千五百年前，就已经不再正确了.

事实上，“何谓数学”这个问题的答案，在人类历史长河中，已经数度更新了.

到公元前 500 年左右为止，数学的确是有关数字（number）的一门学问. 这是古埃及和古巴比伦时期的数学. 在这些文明中，数学所包括的几乎都以算术为主.

从大约公元前 500 年到公元 300 年的这一时期，是希腊数学的时代. 古希腊的数学家主要关心几何学（geometry）. 对于希腊人而言，由于他们强调几何学，所以数学不只研究数字，而且也是有关形状（shape）的学问. 事实上，自希腊数学时代始，数学进入研究领域，而不再只是度量、计算和会计等技巧的大杂烩，他们视数学为一种知性探索，其中包

含了美学和宗教成分.

一直到 17 世纪中叶，英国的牛顿和德国的莱布尼茨各自独立发明微积分前，数学的整体本质未曾有过根本的变革，或者说几乎没有任何显著的进展. 实质上，微积分是研究运动（motion）和变化（change）的一门学问. 在此之前的数学大都局限于计算、度量和形状描述的静态议题上. 在引进了处理运动和变化的技巧后，数学家终于可以研究行星的运行、地球的落体运动、机械装置的运作、液体的流动、气体的扩散、电力和磁力、飞行、动植物的生长、流行病的传染、利润的波动等. 在牛顿和莱布尼茨之后，直到 19 世纪末，数学变成了研究数字、形状、运动、变化以及空间（space）的一门学问.

在 20 世纪，数学活动的爆发相当戏剧化. 在 1900 年，世界上所有的数学知识可以全部装入大约 80 部书籍之中. 而在今日，数学将须十几万部书籍才能容纳. 这种非比寻常的增长，不只源自一个世纪以来数学的进步，也因为许多新的数学分支已纷纷涌现. 譬如代数与拓扑学（topology)，已经细分为不同的子领域.

一种特定的研究之所以被归类为数学，并不是基于什么被研究，反倒是基于它如何被研究，也就是说，基于被使用的方法论. 在最近大约三十年间，一个被大部分数学家所认可的关于数学的定义，才出现了：数学是研究模式的科学（science of patterns）. 数学家的所作所为，就是去检视抽象的模式——数值模式、形状模式、运动模式、行为模式、重复机会模式等. 这些模式可以是真实存在或抽象的、视觉性或心智性的、静态或动态的、定性或定量的、纯粹功利或有点超乎娱乐趣味的. 它们可以源自我们周遭的世界、源自空间和时间的深度，或者源自人类心灵的内部运作. 不同类型的模式当然引出不同的数学分支，比如：算数与数论研究数字与计算模式；几何研究形状模式；微积分主要研究运动模式；概率论主要研究机会模式；拓扑学研究临近与位置模式；逻辑学研究推论模式等.

资料来源——[美]齐斯. 德福林 著. 洪万生等译《数学的语言》

第五节　数列的极限

没有任何问题可以像无穷那样深深地触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想，然而也没有任何其他的概念能像无穷那样需要加以阐明.

——希尔伯特（1862—1943）

学习内容：数列的极限.

目的要求：理解极限思想与微积分的起源，理解数列、数列极限、数列收敛发散的定义；熟练掌握数列极限的判断，数列极限的四则运算法则；了解收敛数列的性质.

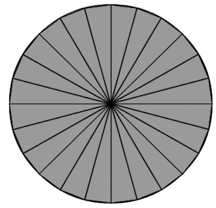
重点难点：数列极限的判断，数列极限的四则运算法则.

一、极限思想与微积分理论的创立

在日常生活中，我们对“极限”一词时有耳闻，爱好体育的学生知道百米赛跑的极限是 9.2 秒（目前被认可的）；医学专业的学生关注人的生命极限；经济专业的学生关心利润的极限等. 极限对大家并不陌生，那么，数学上的“极限”概念与我们所认知的是否相同呢？

1. 刘徽的极限思想

公元 263 年，我国魏晋时代的著名数学家刘徽提出利用圆内接正多边形来推算圆的面积——割圆术（见图 1-19）.



A_3

图 1-19

设有一个圆，首先做其内接正六边形，它的面积记为 A_1；再做其内接正十二边形，它的面积记为 A_2；再做其内接正二十四边形，它的面积记为 A_3；如此下去，每次边数加倍，一般把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n，这样得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots A_n, \cdots$$

内接正多边形的边数 n 越多，即正整数 n 无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋向于无穷大）时，内接正多边形的面积也在不断增大，显然，无限接近于一个定值——圆的面积 A，但是，虽然无限接近却永远达不到圆的面积.

2. 庄子的极限思想

春秋战国时期哲学家庄子在《庄子 · 天下篇》中对“截丈问题”有一段名言：“一尺之锤，日取其半，万世不竭”，意思是说，一尺长的木棍，每天截取它的一半，这个过程将无穷无尽，其中也隐含了深刻的极限思想. 木棍余量的极限显然是 0，但木棍永远是有的.

以上两个例子都是很典型的极限概念. 数学家从 17 世纪开始研究极限的概念，历经 200 多年，终于在 19 世纪完善了极限概念.

3. 微积分理论的创立

公元 16 世纪，由于社会生产力的提高，特别是欧洲的生产向大工业方向发展，促进了航海、天文等事业的拓展，对于“运动”的研究成为当时自然科学的中心问题，在这种背景下，微积分为解决生产力及科学研究的实际问题而产生了.

到了 17 世纪，法国数学家笛卡儿（1596—1960）引进坐标系后，变量数学的时期开始了. 研究“运动问题”和“几何问题”涉及“变速运动的瞬间速度”、“曲线围成平面图形的面积”等问题，许多卓越的数学家与物理学家的研究，为微积分的诞生作了准备，直到 17 世纪 60~70 年代，牛顿从力学问题入手，莱布尼茨从几何问题出发，利用不严密的极限方法，分别独立创立了微积分. 直到他们把积分的计算与微分联系起来，人们才有了解决诸如变力做功、曲线图形等问题的简单而有效的工具. 然而，微积分理论基础的建立，大约推迟了两个世纪.

1821 年，法国数学家柯西（1789—1857）在他的《分析学教程》等著作中给出了分析学中一系列基本概念的严格定义，并且引入了严格的叙述与论证，从而开创了微积分的近代体系，柯西在 1821 年提出的关于叙述极限的 ε 方法，用不等式刻画整个极限过程，将无穷的运算化为不等式的推导，柯西被称为近代微积分的奠基者，现代微积分的表达和证明方法，基本上都采用了柯西的理论体系，在此基础上，德国数学家威尔斯特拉斯（1815—1897）将 ε 和 δ 结合起来，完善了 ε-δ 方法，摆脱了单纯的运动和直观理解.

二、数列

定义 1　无穷多个数按照一定顺序排成一列 $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ 称为数列，记作 $\{y_n\}$，其中 y_n 称为数列的一般项或通项，n 为正整数，称为下标.

显然，数列的项是其下标的函数，因此数列还可以表示为

$$y_n = f(n), n \in N^+$$

例如 观察下列数列的变化趋势：

（1）$\{(-1)^n\}: -1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$. （2）$\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$.

（3）$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$. （4）$\left\{1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right\}: \frac{1}{2},\frac{5}{4},\cdots,1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n,\cdots$.

（5）$\{n^2\}: 1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots$.

在初等数学中，我们关心数列的通项公式及其前 n 项和，现在我们要研究当 n 无限增大时，数列的整体变化趋势.

对于数列（2），当 n 无限增大时，其通项 $\frac{1}{n}$ 越来越小，且无限接近于 0.

对于数列（3），当 n 无限增大时，其通项 $\frac{1}{2^n}$ 越来越小，且无限接近于 0.

对于数列（4），当 n 无限增大时，其通项 $1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ 虽然有时比 1 大有时比 1 小，但到 1 的距离 $|y_n - 1| = \frac{1}{2^n}$ 越来越小，因此 y_n 无限接近于 1.

以上讨论的 3 个数列有共同的特性：当 n 无限增大时，其通项都无限接近于某个常数. 把这种性质抽象出来，就形成了极限的定义.

三、数列的极限

定义 2 设有数列 $\{y_n\}$，如果存在一个常数 A，当 n 无限增大时，y_n 无限接近于 A，则称当 $n \to \infty$ 时数列 $\{y_n\}$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad 或 \quad y_n \to A(n\to\infty).$$

如果一个数列有极限，则称这个数列是收敛的，否则称这个数列是发散的.

上述数列中，（2），（3），（4）数列是收敛的，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right] = 1$.（1），（5）数列是发散的，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty} n^2$ 不存在. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2$ 是趋于无穷大而不存在，也可记为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

【关注符号 lim】

lim 表示“极限”，是其英文 limit 的缩略语，这个符号从来不单独使用，总是与“$\to$”相伴而行，写成 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 或 $\lim\limits_{n\to 0}$ 这样的形式. 这两种写法分别表示“n 无限增大”和“n 无限接近于零”. 其中，$\lim\limits_{n\to\infty}$ 也不单独使用，写成诸如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$ 形式. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$=0 的含义是“$n$ 无限增大时，$1/n$+1 无限接近于零”.

在 1786 年出版的数学书籍中，第一次使用 lim 这个符号. 刚开始的时候没有“$n\to\infty$”这一写法，都是用“n=∞”这一写法，进入 20 世纪，才用“$\to$”代替“=”.

但“无限接近……这一描述方法没有数学的精确性”，德国数学家外尔斯特拉斯的 ε—

δ 极限定义开辟了不等式定义与研究极限的精确时代.

例题 1 讨论下列数列的极限情况.

（1）$y_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$；　　（2）$y_n = 2 - \dfrac{1}{n^2}(n = 1,2,3\cdots)$.

解 （1）当 n 为奇数时，y_n 为一正数，当 n 为偶数时，y_n 为一负数. 当 n 越来越大时，$|y_n|$ 越来越小，当 $n \to \infty$ 时，y_n 与常数 0 无限接近，所以数列 $\{y_n\}$ 的极限是 0，即

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 0.$$

（2）当 $n \to \infty$ 时，y_n 与常数 2 无限接近，所以 $y_n = 2 - \dfrac{1}{n^2}(n = 1,2,3\cdots)$ 的极限是 2，即

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right) = 2.$$

四、收敛数列的性质

定理 1 （极限的唯一性） 若数列 $\{y_n\}$ 收敛，则其极限值唯一.

对于数列 $\{y_n\}$，如果存在正数 M，使得对一切 y_n 都有 $|y_n| \le M$，则称数列 $\{y_n\}$ 有界；如果这样的 M 不存在，则称数列 $\{y_n\}$ 无界.

定理 2 （收敛数列的有界性） 如果数列 $\{y_n\}$ 收敛，则数列 $\{y_n\}$ 必有界.

由定理 2 可知，有界是数列收敛的必要条件. 我们常用该定理判断数列发散. 例如，$\left\{(-1)^n n\right\}$ 的通项的绝对值 $\left|(-1)^n n\right| = n$，故 $\left\{(-1)^n n\right\}$ 无界，所以 $\left\{(-1)^n n\right\}$ 必发散. 因此有下列结论：

推论 无界数列必发散.

注意，有界数列不一定收敛. 例如，数列 $\left\{(-1)^n\right\}$ 的通项 $\left|(-1)^n\right| \le 1$，是有界数列，但该数列发散.

定理 3（保号性） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，且 $a > 0$（或 $a < 0$），则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $y_n > 0$（或 $y_n < 0$）.

推论 如果数列 $\{y_n\}$ 从某项起有 $y_n \ge 0$（或 $y_n \le 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，则 $a \ge 0$（或 $a \le 0$）.

定理 4 如果数列 $\{y_n\}$ 收敛于 a，则数列 $\{y_n\}$ 的任何子数列都收敛，且收敛于 a.

由定理 4 可知，若 $\{y_n\}$ 的两个子数列收敛于不同的数，则 $\{y_n\}$ 发散. 例如，对于数列

$$y_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n}, n = 2k \\ \dfrac{1}{n^2}, n = 2k-1 \end{cases} (k = 1,2,3,\cdots),$$

有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 1 \ne \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = 0$，故原数列发散.

五、数列极限的四则运算

根据极限的定义，可用观察的方法求出一些简单数列的极限，但对于比较复杂的数列，用观察法求极限很难，需要研究数列极限的运算. 下面我们给出数列极限的四则运算法则.

设有数列 x_n, y_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ 则

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$ ；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$ ；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot x_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \cdot a \quad (c\text{是常数})$ ；

（4） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b} \quad (b \neq 0)$.

注　法则（1）和（2）可以推广到三个及三个以上有限个数列极限的情形.

例题 2　已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 6,$ 求

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(5x_n)$ ；　（2） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{3}$ ；　（3） $\lim\limits_{n\to\infty}(5x_n - \dfrac{y_n}{3})$.

解　（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(5x_n) = 5\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5 \times 5 = 25$ ；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{3} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1}{3} \times 6 = 2$ ；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}(5x_n - \dfrac{y_n}{3}) = \lim\limits_{n\to\infty} 5x_n - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{3} = 25 - 2 = 23$.

六、无穷递缩等比数列的求和公式

例题 3　求等比数列 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots$ 的前 n 项和，并求当 $n \to \infty$ 时数列的极限.

解　这个等比数列的公比是 $\dfrac{1}{2}$ ，根据等比数列的前 n 项和公式，得

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

因此， $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \dfrac{1}{2^n}) = 1$.

定义 3　一般的，等比数列 $a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots a_1q^{n-1}, \cdots$ ，当 $|q| < 1$ 时，称为无穷递缩等比数列. 其前 n 项和 S_n ，当 $n \to \infty$ 时的极限叫做这个无穷递缩等比数列的和，并用符号 S 表示

因为 $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ，所以

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{a_1}{1-q}$$

称公式 $S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$ 为无穷递缩等比数列的求和公式.

例题 4　（弹球模型）

一只球从 100 米的高空掉下，每次弹回的高度为上次高度的 $\dfrac{2}{3}$ ，这样下去，用球第 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 次的高度来表示球的运动规律，则得数列

$$100, 100\times\frac{2}{3}, 100\times\left(\frac{2}{3}\right)^2, \cdots, 100\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

从数列的变化趋势可以看出，随着次数 n 的无限增大，数列无限接近于 0，即

$$\lim_{n\to\infty}100\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0 .$$

注：变量的变化过程不是定性的研究过程，即自变量不是静态变化的，而是一种动态的变化过程：$n\to\infty$，不是静止于某一点，其相应的函数值也一样处于动态变化之中，这是极限的特点之一．如例题 4，随着次数 n 的无限增大，数列（n 的函数值）无限接近于 0；它是一个动态的过程．

【衔接专业】 巴菲特以价值投资著称，收益稳定，年平均投资收益约为 24%．假设他每年的收益率为 24%，若投入 100 万美元，请问：

（1）一年后他的资产是多少？

（2）两年后他的资产是多少？

（3）n 年后资产是多少？

习题 1-5

1．观察并写出下列数列的极限值：

（1）$y_n=\dfrac{n}{n+1}$；　　（2）$y_n=n(-1)^n$；

（3）$y_n=1-\dfrac{1}{10^n}$；　　（4）$y_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

2．求下列数列的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^3}\right)$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{8-n^2}$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+1}{3+n^2}$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{3\times5}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+2)}\right]$.

3．求下列无穷递缩等比数列的和：

（1）$3,1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\cdots,$　　（2）$1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},\cdots$

（3）$1,-x,x^2,-x^3,\cdots(|x|<1)$.

第六节　无限变化的函数模型——函数极限

学习内容：函数的极限

目的要求：掌握 $x \to \infty$ 时，$x \to x_0$ 时函数极限的概念，左极限、右极限的概念，以及左、右极限的求解，掌握极限的性质．理解极限思想与方法在机电设备维修与电工学中的应用.

重点难点：当 $x \to \infty$ 时，$x \to x_0$ 时，函数极限的求解，以及左、右极限的求解.

数列是定义在正整数集合上的函数，它的极限只是特殊函数的极限，现在讨论定义在实数集合上的函数 $y = f(x)$ 的极限.

一、极限思想方法在机电专业与现实生活中的应用

1. 制冷原理

在机电设备维修与管理这个专业，我们会接触到各种各样的制冷方式，然而我们在了解一种制冷方式时，首先需要了解的是其理论循环，然后才会了解其实际循环．然而，理论循环就应用到了数学中的极限（逼近）思想，理论循环中的理想条件和状态，在现实生活中根本不可能实现，因此我们只有采用极限（逼近）法来构造理论循环模型，再与实际循环相对比，使我们对此制冷原理有一个清醒的、深刻的认识.

$$x \to \infty$$

2. 电压的极限值

如图 1-20 所示 RC 串联电路中，已知在 t=0 瞬间将开关 S 合上，电路接通直流电压 U_s 的电压源，电压对电容元件开始充电，电容 C 上的电压 u_C 逐渐升高，若 U_s=20V，C=0.5F，R=4.8Ω，$u_C(0)$=0，则电压 u_C 随时间 t 的变化规律：$u_C = 20(1 - e^{-\frac{5}{12}t})$，求充电后 u_c 的极限值（答案参考本模块第六节【衔接专业】).

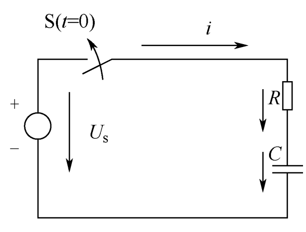


图 1-20

3. 椅子问题[答案见本模块第十一节释疑问答]

问题提出　日常生活中经常碰到这样一个事实，把椅子放在不平的地面上，通常椅子只有三只脚着地，放不稳，然而，只须少挪动几次，就可以使四只脚同时着地，放稳了．这个看来似乎与数学无关的现象，你能用数学语言给以描述并用数学工具来证实吗？

二、当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 1　设函数 $y = f(x)$，如果存在一个常数 A，当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$

无限趋近于 A，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限．记作：

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

例题 1　讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$．

解　作出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形如图 1-21 所示．由图可见，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的值与 $A=0$ 无限接近，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$．

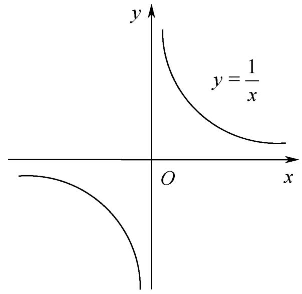


图 1-21

上述定义中的 $x\to\infty$，指的是 x 的变化是沿着 x 轴向正负两个方向趋于无穷的．在一些实际问题中，有时需要区分 x 趋于无穷大的符号．如果 x 取正值且无限增大，则称 $x\to+\infty$ 如果 x 取负值且绝对值无限增大，则称 $x\to-\infty$．因此，函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的极限可以这样定义：

定义 2　设函数 $y=f(x)$，如果存在一个常数 A，当 $x\to+\infty$（$x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于 A，则称当 $x\to+\infty$（$x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限．记作：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \ \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=A\right) 或 f(x)\to A(x\to+\infty)\ \left(f(x)\to A(x\to-\infty)\right).$$

例题 2　讨论 $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x$ 的极限.

解　由指数函数的图像可知，当 $x\to-\infty$ 时，$3^x\to0$，

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$．

定理 1　当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

注意　当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$，且 $A\neq B$ 或 A，B 中至少有一个不存在时，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

例题 3　讨论 $y=\arctan x$ 在 $x\to\infty$ 时的极限．

解：由反正切函数的图像知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在．

三、当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

1．当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例题 4　首先考查函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 $x\to1$ 时的变化情况.

因为当 $x=1$ 时，函数没有意义，而当 $x\neq1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，其图形如图 1-22 所示．不难看出，当 $x\to1(x\neq1)$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于 2．我们称 $x\to1$ 时

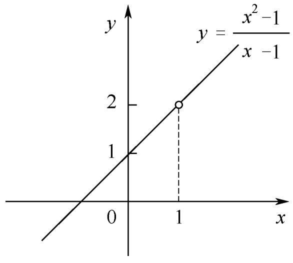


图 1-22

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$以 2 为极限.

一般地，有如下定义：

定义 3 设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义（但在x_0点可以没有定义），如果存在一个常数A，当x无限趋近于x_0（但$x\neq x_0$）时，函数$f(x)$无限趋近于A，则称当$x\to x_0$时，**函数$f(x)$以A为极限**．记作：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

注意 在x_0点可以没有定义.

2．当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的左极限与右极限

在上述$x\to x_0$时，函数$f(x)$以A为极限的讨论中，x是以任意方式趋近于x_0的．但在许多问题中，我们只能或只需考虑当x从大于x_0(或小于x_0)的方向趋于x_0时，$f(x)$的变化趋势．例如，对函数$y=\sqrt{x}$，如果要考查x趋近于 0 时的变化趋势，只能考虑x从点 0 的右侧($x>0$)趋近于 0 时的情形．于是，有必要引入左极限与右极限的概念.

定义 4 设函数$y=f(x)$在点x_0的左邻域（或右邻域）有定义，如果存在一个常数A，当x从x_0的左侧（$x<x_0$）（或右侧（$x>x_0$））趋近于x_0时，函数$f(x)$无限趋近于A，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限(或右极限)．记作：

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\ (\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A)\ 或\ f(x_0-0)=A\ (f(x_0+0)=A).$$

函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限与它在x_0处的左右极限之间有如下关系：

定理 2 极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在且等于$A$的充分必要条件是极限$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在且等于$A$．即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

例题 5 设函数$f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 1 \\ 2x+1, & x>1 \end{cases}$，试讨论极限$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在.

四、函数极限的性质

类似于数列极限，可得到函数极限的如下性质.

性质 1（函数极限的唯一性） 若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则其极限值唯一.

性质 2（函数极限的局部有界性）若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则函数$f(x)$在$x_0$的某去心邻域内有界.

性质 3（函数极限的局部保号性） 若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$A>0$（或$A<0$），则在$x_0$的某去心邻域内恒有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）.

推论 若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$f(x)\geqslant 0$（或$f(x)\leqslant 0$），则在$x_0$的某去心邻域内恒有$A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）.

性质 4（夹迫定理）若在x_0的某去心邻域内有，$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，且

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = A\text{，则}\lim_{x \to x_0} h(x) = A$$

说明　上述性质当 $x \to \infty$ 时也成立.

例题 6　讨论函数 $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$，当 $x \to 1$ 时的极限.

解　$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 3$.

【衔接专业】电压的极限值[见图 1-20]

解　$\lim\limits_{t \to +\infty} u_{\mathrm{C}} = \lim\limits_{t \to +\infty} 20(1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{12}t}) = 20$.

也可用 Mathematica 作图，如图 1-23 所示，采用极限定义分析可得 u_{C} 变化趋势为 20，于是充电后 u_{C} 极限值为 20.

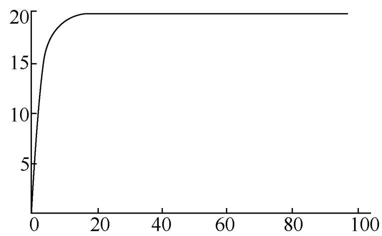


图 1-23

习题 1-6

1．求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x \to -\infty}(1 + \dfrac{1}{x})$；　　（2）$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{2}}$；

（3）$\lim\limits_{x \to \infty}(3 - \dfrac{5}{x^2})$；　　（4）$\lim\limits_{x \to +\infty}[2 + (\dfrac{1}{3})^x]$；

（5）$\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - 6x + 8)$；　　（6）$\lim\limits_{x \to -1}(3x^2 - x + 1)$；

（7）$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$；　　（8）$\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$.

2．设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leqslant 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$，试讨论极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

3．设函数 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leqslant 1 \\ x - 3, & x > 1 \end{cases}$，试讨论极限 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

4．设 $f(x) = \begin{cases} x + a, & x > 0 \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 3, & x < 0 \end{cases}$，若极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在，求常数 a 的值.

5．设 $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x < 0 \\ a + \mathrm{e}^x, & x > 0 \end{cases}$，若极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在，求常数 a 的值.

第七节　无穷小量与无穷大量

学习内容：无穷小量与无穷大量、无穷小的比较

目的要求：熟练掌握无穷小与无穷大的定义、熟练掌握无穷小的运算法则与无穷小的比较，重点掌握运用无穷小的性质与比较来计算有关极限问题．理解“ ∞ ”的起源与在电学中的应用.

重点难点：无穷小的性质与比较

一、“ ∞ ”无限的力量

英国的华里斯想到了∞，他在 1656 年写的《无限的算术》中首次使用这个符号．它的特殊性在于这个符号所表示的不是数，而是表示非常非常大的“ 状况 ”的符号．符号不仅可以节省书写的时间，而且也是对概念的精确表现，如同现代流行的标语和标识，它们传递着不同的信息．显而易见，自然数是无穷的（永无尽头）．如果宣称任何一个数是最大的，你总能找到一个更大的．0 和 1 之间有无穷多的数也是真的，但是稍复杂一点．无穷的概念让数学家们着迷了数千年. 希腊斯多葛学派的芝诺通过一系列的悖论研究了这一思想. 他最著名的悖论是认为运动是不可能的, 因为要从 A 点到 B 点, 必须通过其间的无穷多个点, 从一个点到另一个点都需要正数的时间，无穷多个正数的和等于无穷，所以在有限的时间内你不可能走到任何地方．19 世纪 20 年代，柯西提出了“ 无限趋近 ”这一直观性很强的论点，这种论点从概念上澄清了“ 无穷小量是一个函数而不是一个数 ”；直到 19 世纪后半叶，威尔斯特拉斯完善了极限的“ ε-δ ”理论后，无穷小量才准确地定义为“ 以零为极限的变量 ”．至此，我们知道他错在哪里了（无穷多正数的和可以等于有限数），但这一思想却引起了很多研究．现在微积分背后的核心思想是无穷．不断变小的正时间段内（我们称为“ 无限小 ”）的平均变化率可以帮我们定义瞬间变化率．就像汽车的速度表会记下你的速度，以及你在一个极小的正时间段内走过的距离．没有无穷，也许我们真的哪儿都去不了.

二、无穷小量

【引例 1】（洗涤效果）用洗衣机清洗衣物时，清洗次数越多，衣物上残留的污渍就越少．当洗涤次数无限增大时，衣物上的污渍趋于零.

【引例 2】（单摆运动）单摆离开铅直位置的偏度可以用角 θ 来度量，这个角可规定当偏到一方（如右方）时为正，而偏到另一方（如左方）为负．如果让单摆自己摆，则由于机械摩擦力和空气阻力，振幅就不断地减小，在这个过程中，角 θ 就是一个无穷小量.

定义 1　在自变量的某一变化过程中，极限为零的变量称为**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以当 $x\to 0$ 时，变量 $y=x^2$ 为无穷小；

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，变量 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 为无穷小；

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，所以当 $n\to\infty$ 时，变量 $y=\dfrac{1}{n}$ 为无穷小；

因为$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$，所以当$x\to 2$时，变量$x^2-4$为无穷小；

因为$\lim\limits_{x\to -\infty}\mathrm{e}^x=0$，所以当$x\to -\infty$时，变量$\mathrm{e}^x$为无穷小.

注意 (1)一个变量是否为无穷小，除了与变量本身有关外，还与**自变量的变化趋势有关**. 例如变量$y=x-1$，当$x\to 1$时为无穷小；而当$x\to 2$时，$y\to 1$，极限是一个常数. 因而，不能笼统地称某一变量为无穷小，必须明确指出变量在何种变化过程中是无穷小.

(2)在实数中，因为0的极限是0，所以数0是无穷小，除此之外，即使绝对值很小很小的常数也不能认为是无穷小.

无穷小量具有下面的性质：

性质1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小；

性质2 有界变量与无穷小的乘积是无穷小；

性质3 有限个无穷小的乘积是无穷小.

例题1 求极限$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

解 当$x\to 0$时，x^2为无穷小，而$\sin\dfrac{1}{x}$为有界函数，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq 1$，所以$x^2\sin\dfrac{1}{x}$也是无穷小，即$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

【衔接专业】

电容器的容抗特点

由电工学知识可知，如果交流电的频率为f，在电容值C不变的情况下，电容器容抗X_{C}和交流电频率f之间的函数关系是：$X_{\mathrm{C}}=\dfrac{1}{2\pi fC}$，不难看出，随着频率$f$增大，容抗$X_{\mathrm{C}}$减少，且有：$\lim\limits_{f\to\infty}X_{\mathrm{C}}=\lim\limits_{f\to\infty}\dfrac{1}{2\pi fC}=0$，即当$f\to\infty$时，$X_{\mathrm{C}}=\dfrac{1}{2\pi fC}$为无穷小.

上述结果的实际意义：当交流电频率很高时，容抗接近于零，即电容对高频交流电来说，可以看作短路，高频交流电可以直接通过.

三、无穷大量

定义2 在自变量的某一变化过程中，变量y的绝对值无限增大，则称变量y为在该变化过程中的**无穷大量**，简称**无穷大**. 记作：$\lim y=\infty$或$y\to\infty$.

例如，当$x\to 0$时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|$无限增大，所以$\dfrac{1}{x}$是$x\to 0$时的无穷大，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

注意 (1)无穷大是一个变量，不能把一个绝对值很大的常数说成无穷大. 因为再大的常数极限也是它本身.

(2)一个变量是否为无穷大，与自变量的变化过程有关. 与无穷小类似，不能笼统地说某一变量为无穷大，必须明确指出变量在何种变化过程中是无穷大.

从上面的例子中我们不难看出，在自变量的某种变化趋势下，无穷小与无穷大之间存在着非常密切的关系：

在同一变化过程中，无穷大的倒数是无穷小，非零的无穷小的倒数是无穷大.

【衔接专业】

电容器的容抗特点（续）

电容器容抗 X_C 和交流电频率 f 之间的函数关系是 $X_C=\dfrac{1}{2\pi fC}$，不难看出，随着频率 f 减小，容抗 X_C 增大，且有 $\lim\limits_{f\to 0}X_C=\lim\limits_{f\to 0}\dfrac{1}{2\pi fC}=\infty$，即当 $f\to 0$ 时，$X_C=\dfrac{1}{2\pi fC}$ 为无穷大.

当交流电频率变成 0 时，交流电就变成了直流电.

上述结果的实际意义是：对于直流电，电容器的容抗为无穷大，即电容对于直流电来说，可以看作断路，电容器可以阻断直流电的通过.

四、无穷小的比较

由无穷小的性质我们知道，有限个无穷小量的和、差、积仍是无穷小量．为了研究两个无穷小的商，我们先观察下例：

当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{2x},\dfrac{1}{x^2}$ 都是无穷小，但

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to\infty}2=2,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0,$$

因此，两个无穷小商的极限具有不确定性，我们称此类分式为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式．另外，同是趋于 0，但 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 相对于 $\dfrac{1}{x^2}$ 来说是个无穷大的量．因此无穷小之间也有大小关系，即趋于零的快慢问题.

在同一变化过程中，会有很多的无穷小，例如，当 $x\to 0$ 时，变量 $x,x^2,\sin x$ 都是无穷小．但是它们趋近于零的速度是不同的．不同的无穷小趋近于零的速度可以通过它们的比值表现出来（因快慢是相对的）．为了刻画这种快慢程度，我们引入无穷小阶的概念.

定义 3　设 α 与 β 是同一变化过程中的两个无穷小.

（1）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 较高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

（2）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$（$c$ 为常数)，则称 β 与 α 是同阶无穷小；特别地，当 $c=1$ 时，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$；

（3）如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 较低阶的无穷小.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$，所以当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 x 较高阶无穷小，即 $x^2=o(x)(x\to 0)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$，所以当 $x\to 0$ 时，$2x$ 与 x 是同阶无穷小.

因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小，即 $\sin x\sim x(x\to 0)$.

在求极限时，如果分子分母均为无穷小，则可用下述等价无穷小的替换定理，使问题简单化.

定理 1　在自变量的同一变化过程中，若$\alpha,\alpha',\beta,\beta'$均为无穷小，且$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$存在，则$\lim\frac{\alpha}{\beta}$也存在，且有$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

常见的一些**等价无穷小**有：

当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，

$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$.

例题 2　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)\sin x}{1-\cos x}$.

解　当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

注意　在计算极限时，对乘积或商中的无穷小（以因子形式出现的），可以用等价无穷小来替换；对于加、减运算一般情况下不使用，否则可能得出错误的结论.

例题 3　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\tan^2 x}$.

分析：当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，如果在分子的减法运算中使用无穷小的等价代换，则有　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x\tan^2 x}=0$.

这是错误的答案．正确的解法是：

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x\tan^2 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(-\frac{1}{2}x^2)}{xx^2\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

习题 1-7

1．填空题：

（1）当$x\to$____或_____时，$f(x)=\frac{x}{x^2-4}$是无穷小；

当$x\to$____或_____时，$f(x)=\frac{x}{x^2-4}$是无穷大.

（2）当$x\to 0$时，与下列无穷小等价的无穷小分别是：

$\sin kx\sim$______($k\neq 0$)；　$\tan kx\sim$______($k\neq 0$)；　$\mathrm{e}^{2x}-1\sim$_______；

$1-\cos 3x^2\sim$________；　$\ln(1+10x)\sim$_______；　$\sqrt{1+x^2}-1\sim$_______.

2．选择题：

（1）当$x\to 0$时，下列变量是无穷大的是（　　）.

A．$\cos\dfrac{1}{x}$　　B．$\arctan\dfrac{1}{|x|}$　　C．e^{-x}　　D．$\ln|x|$

（2）当$x\to 1$时，$1-x$是$\dfrac{1}{2}(1-x^2)$的（　　）无穷小.

A．较低阶　　B．同阶　　C．等价　　D．较高阶

（3）当$n\to\infty$时，$\sin^2\dfrac{1}{n}$与$\dfrac{1}{n^k}$是等价的无穷小，则$k=$（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．利用无穷小的性质和等价无穷小求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\sin x$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

4．解答题.

（1）当$x\to 1$时，$1-x$与$1-\sqrt[3]{x}$是同阶无穷小还是等价无穷小.

（2）证明：当$x\to -3$时，x^2+6x+9是比$x+3$较高阶的无穷小.

第八节　极限的算术化——四则运算

学习内容：极限的四则运算.

目的要求：熟练掌握极限的运算法则，并能运用四则运算法则求解数列及函数的极限；掌握用变量代换求解复合函数极限的方法．理解极限的运算法则在电工学中的应用.

重点难点：运用四则运算法则求解函数和数列的极限.

一、极限的四则运算

由无穷小与变量极限的关系以及无穷小的性质，可得到函数极限的四则运算法则.

定理 1　如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则$\lim[f(x)\pm g(x)]$存在，且有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B.$$

推论　有限个有极限的变量之代数和的极限等于它们的极限的代数和.

定理 2　如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，$\lim[f(x)\cdot g(x)]$存在，且

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B.$$

推论 1　有限个有极限的变量的乘积的极限等于它们的极限的乘积.

推论 2　如果$\lim f(x)$存在，C是常数，则$\lim Cf(x)=C\lim f(x)$.

推论 3　如果$\lim f(x)$存在，n是正整数，则$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

定理 3　$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B\neq 0$，且$g(x)\neq 0$，则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在，且

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}.$$

注意问题：

（1）求函数和、差、积、商的极限时，必须在各自极限都存在的前提下进行.

（2）在商的情形，要求分母的极限不等于零.

（3）极限的运算法则是对有限项而言的，对于无限项不能用.

【衔接专业】

电容器充电电路电压的极限

如图 1-24 所示是一个电容器充电电路，E 为电源电动势，R 为电阻，C 为电容值，当开关闭合时，电容器开始充电，由电工学知识可知，这时电容器端电压 u_c 与时间 t 的函数关系是

$$u_C(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

试讨论随着时间 t 增大，$u_C(t)$ 有没有极限？

解　根据极限计算法则，有

$$\lim_{t\to+\infty}u_C(t)=\lim_{t\to+\infty}(E-Ee^{-\frac{t}{RC}})=E-E\lim_{t\to+\infty}e^{-\frac{t}{RC}}$$

因为 $t>0$ 时，$e^{-\frac{t}{RC}}$ 为单调递减函数，所以，$t\to\infty$时，$e^{-\frac{t}{RC}}$ 为无穷小，$\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-\frac{1}{RC}}=0$

所以，$\lim\limits_{t\to\infty}u_C(t)=E$.

结果表明，随着 t 增大，电容器的端电压 $u_C(t)$ 越来越接近于电源电动势 E，$u_C(t)$ 随时间的变化规律如图 1-25 所示.

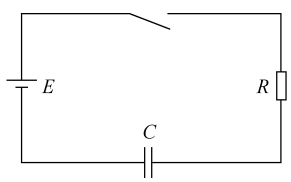


图 1-24　一个电容器充电电路图

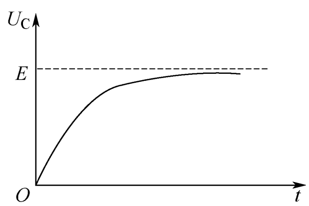


图 1-25　$u_C(t)$ 随时间的变化规律图

例题 1　求 $\lim\limits_{x\to1}(3x^2-2x-7)$.

解　$\lim\limits_{x\to1}(3x^2-2x-7)=\lim\limits_{x\to1}3x^2-\lim\limits_{x\to1}2x-\lim\limits_{x\to1}7=3\times1^2-2\times1-7=-6$.

由此例可知，当 $x\to x_0$ 时，多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的极限值就是这个多项式在点 x_0 处的函数值．即

$$\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)=a_0{x_0}^n+a_1{x_0}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n.$$

例题 2　求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^4+x-2}{x^2-x+1}$.

解　$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^4+x-2}{x^2-x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}(2x^4+x-2)}{\lim\limits_{x\to2}(x^2-x+1)}=\dfrac{2\times2^4+2-2}{2^2-2-1}=32$.

由此例可见，对于有理分式函数 $F(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$，其中 $p(x),q(x)$ 均为 x 的多项式，并且

$\lim\limits_{x\to x_0} q(x)\neq 0$ 时，要求 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{p(x)}{q(x)}$，只需将 $x=x_0$ 代入即可.

例题 3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{4}{3}$.

在求极限时，经常会遇到分子分母的极限均为 0 的情形，我们把它记作“$\dfrac{0}{0}$”型. 对于这种类型的极限，通常采用的方法有：提取公因式法、因式分解法、分式有理化法，找出并消去分子、分母公共的零因子.

例题 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+4)-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\dfrac{1}{4}$.

【衔接专业】

并联电路电阻值的极限

如图 1-26 所示为电阻并联电路，由电学知识可知，并联电路的总电阻是 $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$，问当 R_1 不变，$R_2\to\infty$时，总电阻 R 的极限是多少？

解 根据电学知识分析可知，当 $R_2\to\infty$时，含 R_2 的这条电路不通，相当于断路，电流全部从 R_1 流过，所以总电阻 $R=R_1$, 这个结果用极限方法计算如下：

$R_2\to\infty$时，$R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$是一个$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限，因此

$$\lim_{R_2\to+\infty} R=\lim_{R_2\to+\infty}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\lim_{R_2\to+\infty}\frac{R_1}{\dfrac{R_1}{R_2}+1}=\frac{R_1}{\lim\limits_{R_2\to+\infty}\dfrac{R_1}{R_2}+1}=\frac{R_1}{0+1}=R_1$$

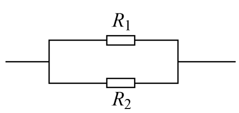


图 1-26

求极限时，若分子、分母的极限均趋向于∞，则称它为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型. 通常用分子分母中的最高次幂项分别去除分子和分母的每一项（**分母的极限存在且不为零**），然后再求极限.

由上述例子可得出下述一般结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当n=m时\\ 0, & 当m<n时\\ \infty, & 当m>n时\end{cases}.$$

其中 $a_0\neq 0, b_0\neq 0, m, n$ 均为非负整数.

例题 5　求 $\lim\limits_{x\to1}(\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x})$.

分析　当 $x\to1$ 时，两个分式的极限都不存在，属于“ $\infty-\infty$ ”型．要先通分，消去零因子，再求极限.

解　$\lim\limits_{x\to1}(\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x})=\lim\limits_{x\to1}\frac{2-(1+x)}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$.

例题 6　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}$.

解　当 $x\to\infty$ 时，$|\sin x|\leq1$，而 $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\frac{1}{x^2}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x^2}\cdot\sin x)=0$.

二、复合函数的极限

定理 4　设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数．$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$．上式又可写为 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

这个定理的意义在于：在一定条件下可以交换函数取值与计算极限的次序.

例题 8　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

解　令 $u=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，且 $\lim\limits_{u\to0}\mathrm{e}^u=1$，故　$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to o}\mathrm{e}^u=1$.

习题 1-8

1．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to2}(4x^2-3x+6)$；　（2）$\lim\limits_{x\to-1}(6x^2+2x-5)$；

（3）$\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2+x-5}{3x+1}$；　（4）$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$；　（6）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-x^3+2}{5x^6+x^3-2}$；　（8）$\lim\limits_{x\to2}(\frac{1}{2-x}-\frac{4}{4-x^2})$.

2．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to2}(5x^3+3x-5)$；　（2）$\lim\limits_{x\to5}(2x^2-5x+3)$；

（3）$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+2x+1}{2-3x^2}$；　（4）$\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$；

（5）$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$；　（6）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x-2}{3x+2}$；　（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2+x}(3+\cos x)$.

3．已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求$a$和$b$.

第九节　两个重要极限

学习内容：两个重要极限.

目的要求：通过学习，使同学们熟练掌握两个重要极限的形式，并且会灵活运用这两个重要极限来计算各种类型的极限.

重点难点：两个重要极限.

本节我们在极限四则运算法则的基础上，继续介绍求极限的方法：用两个重要极限公式求极限，主要解决“$\dfrac{0}{0}$”和“1^∞”型极限问题.

一、第一重要极限

从函数值表（见表 1-3）中初步观察函数的变化趋势。

表 1-3

x	± 1.0	± 0.5	± 0.1	± 0.01	…
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.84147	0.95885	0.99833	0.9998	…

从表 1-3 中发现$\dfrac{\sin x}{x}$在$x\to 0$时，其极限趋向于 1.

第一重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

推广　在极限$\lim\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}$中，只要$\alpha(x)$是无穷小，就有$\lim\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$.

注意　这个重要极限有两个特征：

（1）自变量x在一定变化趋势下，函数$\dfrac{\sin x}{x}$是$\dfrac{0}{0}$型；

（2）分子记号 sin 后的变量表达式与分母的表达式在形式上必须是一致的,

即
$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\quad (\lim_{x\to a}\varphi(x)=0).$$

例题 1　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

解　令$5x=u$，则当$x\to 0$时，$u\to 0$，

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=5.$$

例题 2　求$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{2}{n}$.

解　令$\dfrac{2}{n}=u$，则当$n\to\infty$时，$u\to 0$，

所以
$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2}{n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 2\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 2 .$$

例题 3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1 .$

例题 4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}) = 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

一般地，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$，　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$，　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x} = 1$ 等亦可作为公式使用.

二、第二重要极限

第二重要极限　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = \mathrm{e}$

其中 e 是一个无理数，其近似值为 $\mathrm{e}\approx 2.718281828459045\cdots$

在现实生活中，如物体冷却过程中的温度变化、镭的衰变、细胞的繁殖、树木的生长、本利和的计算等，均属于这种类型，所以这个函数体现了现实世界中的许多事物的生长或消失的数量规律.

我们将数列 $(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的值列成表，见表 1-4.

表 1-4

n	1	2	3	4	5	10	100	1 000	10 000	…
$(1+\frac{1}{n})^n$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	…

由表 1-4 可见，这个数列是单调递增的，其速度是越来越慢，趋于稳定．即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 是存在的(由于证明过程繁琐，这里不再证明)，通常用字母 e 表示这个极限值．即
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$$

该公式称为第二个重要极限公式.

注意　这个重要极限有两个特征：

（1）当 n 无限增大时，函数 $(1+\dfrac{1}{n})^n$ 呈“ 1^∞ ”型；

（2）括号内是两项之和，第一项是 1，第二项是括号外指数的倒数.

这个极限可以推广到连续自变量 x 的函数 $(1+\dfrac{1}{x})^x$，即
$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e} .$$

如果令 $t=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，

因此有公式
$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

综上所述，符合上述两个特征的极限均为 e，即 $\lim\limits_{x\to a}(1+\phi(x))^{\frac{1}{\phi(x)}}=\mathrm{e},(\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=0)$.

例题 5　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}\times 2}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^2=\mathrm{e}^2$.

例题 6　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{5}{x})^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{5}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{5}{-x})^{\frac{-x}{5}\times(-5)}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{5}{-x})^{\frac{-x}{5}}]^{-5}=\mathrm{e}^{-5}$.

例题 7　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\times 2}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=\mathrm{e}^2$.

例题 8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x+6}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x+6}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{1}{x})^x\cdot(1+\dfrac{1}{x})^6]=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^6=\mathrm{e}\cdot 1^6=\mathrm{e}$

例题 9　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2}{x^2-1})^x$.

解法一　
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x^2-1})^x&=\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1})^x=\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x-1})^x\cdot\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^x\\&=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x-1})^{(x-1)+1}\cdot\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x+1})^{-(x+1)\cdot(-1)-1}=\mathrm{e}\cdot 1\cdot\mathrm{e}^{-1}\cdot 1^{-1}=1.\end{aligned}$$

解法二　
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x^2-1})^x&=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2})^{-x}=\lim_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x-1}{x})^{-x}\\&=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x}\cdot(1-\frac{1}{x})^{-x}=\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}=1.\end{aligned}$$

解法三　
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x^2-1})^x&=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2})^{-x}=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^2})^{-x^2\cdot\frac{1}{x}}\\&=[\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^2})^{-x^2}]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1.\end{aligned}$$

【e 的故事】有一天，一个生意人急着用钱，便向一个财主借钱．财主见生意人十分着急，便趁机抬高利息，他开出的条件是，生意人每借一两银子，就要在一年后还 2 两银子，利率高达 100%！正在生意人犹豫不决之时，财主又有了一个主意，他想，如果改成半年的利率 50%，还是借一年，那么，半年后可以得到 1.5 两银子，一年后可以得到 2.25 两银子，这样赚得更多！他赶紧收回了此前的条件，改成了半年还钱的新条件．可是话刚说完，他就又后悔了．既然半年还钱比一年还钱赚得更多，那为何不改为每月还钱、每周还钱、每

天还钱呢？于是财主赶紧回屋拿起笔来算一算.

半年还一次，利率 50%，还钱总数是$(1+0.5)^2=2.25$(两)；

每月还一次，利率 1/12，还钱总数是$(1+1/12)^{12}=2.6130$(两)；

每天还一次，利率 1/365，还钱总数是$(1+1/365)^{365}=2.7146$(两).

计算结果让财主十分失望，还钱总数并没有他预想那么多．到这里读者一定看出来了，如果我们把每天再拆成每一小时、每一分钟、每一秒，还钱总数会增长得更加缓慢，最终会越来越接近神奇的自然对数底 e．当x趋于无穷大时，$(1+1/x)^x$的极限正是e.

习题 1-9

1．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{3}{x}$；

（5）$\lim\limits_{n\to \infty}n\sin\dfrac{5}{n}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x^2)}{1-x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(3-x)}{x^2-9}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin 3x}$；

（10）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

2．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{5}{x})^x$；

（2）$\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{1}{2x})^x$；

（3）$\lim\limits_{x\to \infty}(1-\dfrac{3}{x})^x$；

（4）$\lim\limits_{x\to \infty}(1-\dfrac{1}{4x})^x$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{5}{x}}$；

（7）$\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{1}{2x})^{x-1}$；

（8）$\lim\limits_{x\to \infty}(\dfrac{1+x}{x})^{2x}$；

（9）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$；

（10）$\lim\limits_{n\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n}$.

第十节　函数的重要特性——连续性

学习内容：函数的连续性.

目的要求：掌握函数连续性的概念, 间断点的概念及分类, 区间上的连续函数的定义. 了解连续函数的运算法则，了解闭区间上连续函数的性质．理解“连续”与“间断”思想在电工学和企业管理中的应用.

重点难点：函数的连续性概念，间断点的判断，连续函数的运算法则，区间上连续函数的性质.

自然界有很多现象，如气温的升高、流动河水的流量、物体运动的速度等，其量都是不断变化的，连续的概念就是这些自然现象的描述，反映在函数关系上，就是自变量的微小变化，只能引起函数值（因变量）的微小变化．如果自变量的微小变化会引起函数值的一个突然跳跃甚至无法定义，则这个函数具有不连续性（或称为间断的）.

连续是函数的重要性态之一，在几何上表示为一条连贯、不间断的曲线，连续函数是微积分研究的主要函数类型．间断在几何上表现为非连贯、有突变的曲线.

回顾函数在 x_0 点的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，这里 $f(x_0)$ 可以有三种情况：

1） $f(x_0)$ 无定义（示例见图 1-27），比如特殊极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}=1$.

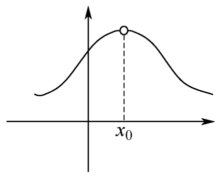


图 1-27

2） $f(x_0)\neq A$ （示例见图 1-28），比如 $f(x)=\begin{cases}x\ , & x\neq x_0\\ x+1\,, & x=x_0\end{cases}$， $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0\neq f(x_0)$

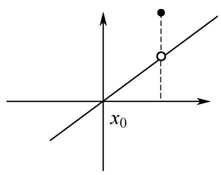


图 1-28

3） $f(x_0)=A$ （示例见图 1-29）.

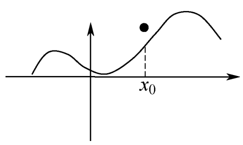


图 1-29

一、函数的连续性

1．改变量（或称增量）

定义 1　设变量 u 从它的初值 u_0 改变到终值 u_1，终值与初值之差 u_1-u_0 称为变量 u 的改变量，记作

$$\Delta u=u_1-u_0\ .$$

注意：改变量 Δu 可以是正的、负的，也可以为零.

对函数 $y=f(x)$，当自变量 x 从 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 $f(x)$ 相应地从 $f(x_0)$ 变到

$f(x_0+\Delta x)$，称 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的相应改变量，记作 Δy，即

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

2. 函数连续的概念

从直观上来说一个函数是连续变化的，那么它的图形应该是一条连续不断的曲线，亦即可以一笔画成．我们先观察图 1-30 和图 1-31 两个函数的图像．

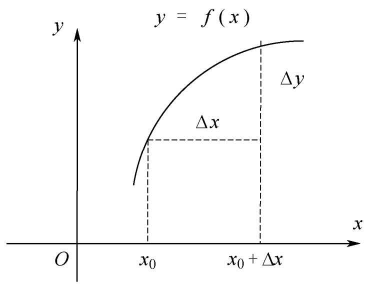


图 1-30

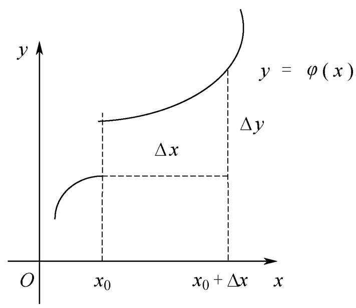


图 1-31

在直观上一看便知，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点是连续的，而 $y=\varphi(x)$ 在 x_0 是间断的．再仔细分析一下，当自变量在 x_0 处的改变量 $\Delta x\to 0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，而函数 $y=\varphi(x)$ 的改变量 $\Delta y=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$ 不可能趋于零．据此，给出函数在一点处连续的严格定义．

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果自变量 x 在 x_0 处取得的改变量 Δx 趋于零时，函数相应的改变量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \quad 或 \quad \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续．

若令 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x=x-x_0$．易见，$\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$．所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

可改写为
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0,$$

即
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

因此我们可以得到与定义 2 等价的定义：

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续．

相应于左极限与右极限两个概念，我们有：

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处**左连续**；

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处**右连续**．

定理 1　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 点既左连续又右连续．

该定理常用来判定分段函数在分段点处的连续性．

【点连续的数学模型】

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

例题 1 函数 $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x<1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处是否连续?

解 因为 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-}(2-x) = 1$， $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$，而 $f(1)=1$，

所以， $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

定义 4 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续；如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续．使函数 $f(x)$ 连续的区间叫做函数的**连续区间**.

二、初等函数的连续性

1．连续函数的运算

定理 2 （四则运算法则） 如果函数 $f(x), g(x)$ 在 x_0 点处连续，则 $f(x) \pm g(x)$， $f(x) \cdot g(x)$， $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 在 x_0 处也连续.

该定理根据连续的概念和极限的运算法则很易证明，读者可自己证明.

由定理 2 容易得到：

（1）多项式函数 $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

（2）分式函数 $y = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$ 除分母为零的点外，在其他点都连续.

下面再给出连续函数的其他运算法则，这里均不证明.

定理 3 （复合函数的连续性） 如果函数 $u=g(x)$在点x_0 连续， $g(x_0)=u_0$，而且函数 $y=f(u)$在点u_0 连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 x_0 点连续，即

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f[g(x_0)].$$

定理 4 （反函数的连续性） 设函数 $y=f(x)$ 在某区间上连续，且单调增加（减少），则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应的区间上连续且单调增加（减少）.

2．初等函数的连续性

定理 5 （初等函数的连续性） 初等函数在其定义区间上连续.

利用初等函数的连续性，可使极限运算简化．如果 x_0 是初等函数 $y=f(x)$ 定义域内的点，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$．即把极限运算转化为函数值的计算.

需要注意的是：分段函数在其定义区间上不一定连续．但可以证明**当且仅当**分段函数在其分段点连续时，函数是连续的.

例题 2 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0 \\ (x+k)^2, & x \geq 0 \end{cases}$，问 k 为何值时， $f(x)$ 在其定义域内连续?

解 若 $f(x)$ 在定义域内连续，则 $f(x)$ 必在 $x=0$ 处连续，因此必有

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

而 $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{x}=2,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+k)^2=k^2=f(0),$$

所以 $$k^2=2,\ 即\ k=\pm\sqrt{2}.$$

三、间断点及其分类

定义 5　由定义 3 可知，函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续，必须同时满足下列三个条件：

（1）$f(x)$ 在 x_0 点有定义；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果上述三个条件中至少有一个不满足，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续．此时，称函数 $f(x)$ 在 x_0 点处间断，x_0 点称为间断点．

下面举例说明函数间断点的几种常见类型．

例题 3　函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没意义，所以 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的间断点．因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，我们称 $x=0$ 为函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的**无穷间断点**．如图 1-32 所示．

例题 4　函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$.

因为 $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在．所以 $x=0$ 为函数的间断点．因函数的图像在 $x=0$ 处产生了一个跳跃，我们称 $x=0$ 为该函数的跳跃间断点．如图 1-33 所示．

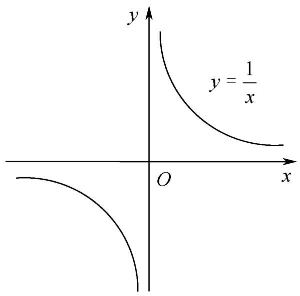


图 1-32

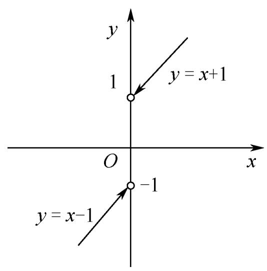


图 1-33

例题 5　函数 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$ 在 $x=1$ 处没有定义，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点．但

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim_{x\to 1}(1+x)=2.$$

如果补充 $f(1)=2$，则所给函数在 $x=1$ 处连续，所以称 $x=1$ 为该函数的可去间断点．

一般地，我们把间断点分为两类：

第一类间断点：设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，如果左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在，

则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

其中，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，即极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则称间断点 x_0 为 $f(x)$ 的**可去间断点**；若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则称间断点 x_0 为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

第二类间断点：左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在的间断点，称为第二类间断点.

其中，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x^+{}_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x^-{}_0}f(x)=\infty$）（或 $+\infty,-\infty$）则称间断点 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**.

【衔接专业】

例题 6 如图 1-34 所示是一个带开关的电路，开关打开时，电阻上的电压为 0，开关闭合后，电阻上的电压为 U，电阻电压随时间 t 的变化关系为

$$U(t)=\begin{cases}0, & 0<t<t_0\\ u, & t\geq t_0\end{cases}$$

这是一个阶梯函数，t=t_0 为跳跃间断点.

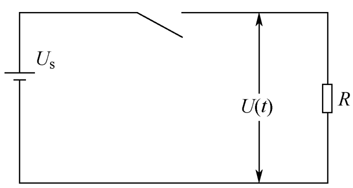


图 1-34

四、闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数具有很多特殊性质，这些性质在理论和应用上都有重要意义．但由于证明较难，这里仅给出结论，不予证明.

定理 6 （有界性） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界．如图 1-35 所示.

一般来讲，开区间上的连续函数不一定有界．例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

定理 7 （最值定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必能取得最大值和最小值．也就是说存在 $x_1,x_2\in[a,b]$ 使 $f(x_1)=m,f(x_2)=M$，且对任意的 $x\in[a,b]$，都有 $m\leq f(x)\leq M$．如图 1-36 所示.

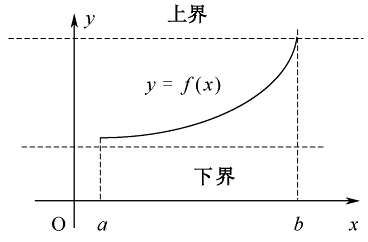


图 1-35

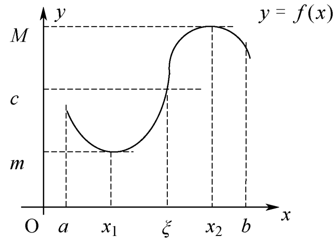


图 1-36

这个定理说明：

（1）在闭区间上的连续函数一定能够取得最大值和最小值；

（2）尽管有最大值和最小值存在，但在什么时候取得以及最大值最小值各是多少，仍是未知的.

注意　开区间上的连续函数，不一定具有此性质.

定理 8（介值定理）　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则对于任何介于 m 与 M 之间的数 c(即 $m<c<M$)，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=c$，如图 1-36 所示.

定理 9（零点存在定理）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$．如图 1-37 所示.

零点存在定理说明，如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足条件，则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根．因此，可以用零点定理证明一个方程的根的存在性及判断根的所在范围.

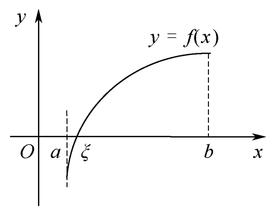


图 1-37

例题 7　证明方程 $e^{3x}-x=2$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证　令 $f(x)=e^{3x}-x-2$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

又
$$f(0)=-1<0,\quad f(1)=e^3-3>0.$$

由零点存在定理可知，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=e^{3\xi}-\xi-2=0$.

即方程 $e^{3x}-x=2$ 在 $(0,1)$ 内至少有一实根.

习题 1-10

1．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}3-2x, & x<1\\ x^2, & x\geq 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处是否连续？

2．（1）设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ a+x, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　）.

A．2　　B．1　　C．-1　　D．0

（2）$x=1$ 是可去间断点的函数为（　　）.

A．$y=\dfrac{1}{x+1}$　　B．$y=\dfrac{1}{x-1}$

C．$y=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$　　D．$y=\begin{cases}x-1, x\leq 1\\ 3-x, x>1\end{cases}$

（3）已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $f(x_0)=\pi$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[3f(x)+5]=$（　　）.

A．$3\pi+5$　　B．3π　　C．$3\pi-5$　　D．0

3．求下列函数的间断点，并指明其类型：

（1）$y=\dfrac{\sin x}{x}$；　　（2）$y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$；

（3）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$；　　（4）$f(x)=\begin{cases} x-1 & x\le 0 \\ 2x & x>0 \end{cases}$.

4．解答题：

（1）讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ \tan 2x, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否连续?

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0 \\ 3x^2-2x+k, & x\ge 0 \end{cases}$，问 k 为何值时，$f(x)$ 在其定义域内连续?

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, & x>0 \\ a, & x=0 \\ 2(x+1)+b, & x<0 \end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，求 a,b .

5．证明题：

证明方程 $x^5-3x-1=0$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

第十一节　释疑问答

问题 1　为什么说极限的概念是最重要的概念之一

极限的方法是高等数学中研究函数的主要方法．许多新概念的引入，许多重要定理的证明都要用到它．例如，用极限定义函数的连续性、渐近线、导数、定积分与广义积分、收敛级数及重积分等．可以说，用极限的概念和方法建立了微积分学的基本内容，并在工程学、电工学、经济学、机械学等的许多课程及其他科学技术中，极限亦有同样重要的作用．而极限概念又是极限方法的基础，所以说，它是重要的概念之一，有学者认为“作为基础来说，它是支撑一切的”，可见其重要性.

我们学习应用数学，一开始就要遇到极限这只“拦路虎”，要很好地理解和熟悉它.

问题 2　一个变量无限接近一个常数有几种情况？

有两种情况，一种是等于极限，如一个婴儿自呱呱落地，日复一日，吸吮乳汁，逐渐成长，但到 20 岁左右时，身高已达极限，不再生长，其身高等于极限.

二是不等于极限，设想有一块蛋糕，头天吃它的一半，次日吃余下的一半，日复一日，蛋糕余量的极限显然是零，但蛋糕永远是有的．这种情况是最值得研究的.

问题 3　在重要极限公式$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$的证明中要用到圆（扇形）的面积公式$S=\dfrac{1}{2}Lr$吗？

事实上，在对$S=\dfrac{1}{2}Lr$的证明中用到重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，从而犯了循环论证的错误.

魏晋刘徽的“割圆术”是对无限问题的独特认识和致用的处理方式，是为证明圆面积公式而设计出来的方法；刘徽之前，希腊的阿基米德在割圆术的基础上，用穷竭法也证明了圆的面积公式．其中刘徽的证明法强调计算的程序性和构造性，而阿基米德的证法则倾向于演绎的严谨性，这两种证法说明，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$证法所谓的循环论证是可以避免的.

例题 1　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$是高等数学的重要极限之一，许多高等数学教材都借助图 1-38（或图 1-39）通过关系式$S_{\triangle AOB}<S_{扇AOB}<S_{\triangle AOD}$（或$S_{扇OBD}<S_{\triangle OBC}<S_{扇OAC}$）

即$\sin x<x<\tan x$（或$(\cos x)^2\cdot x<\cos x\cdot\sin x<x$）

推导出$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$（或$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{1}{\cos x}$），进而通过“夹迫原则”完成证明，一些外文原教材也不例外.

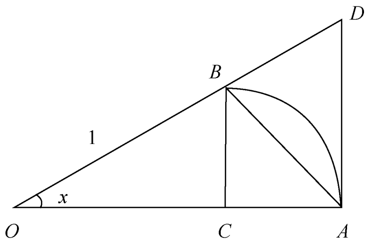


图 1-38

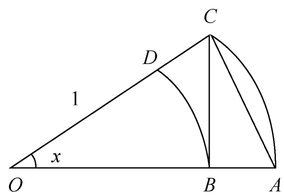


图 1-39

但是，一些文献对这种证明提出质疑，认为证明犯了循环论证的错误，并且提出了新的证明方法．质疑的焦点是，上述两种证法所用到的扇形的面积公式$S=\dfrac{1}{2}Lr$的严格证明必须用到重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

例题 2　阿基米德对圆面积公式证明

阿基米德在《圆的度量》的命题 1 中用穷竭法也证明了圆的面积为$S=\dfrac{1}{2}Lr$.

命题 1　圆的面积等于一个以其周长及半径作为两个直角边的直角三角形的面积，其证明过程如下.

首先，基于《几何原本》第十卷的第一个命题：给定大小两个量，从大量中减去它的一大半，再从剩下的量中减去它的一大半，重复下去，可以使其所余的量小于所给的量．容易证明圆的面积与圆内接正多边形（见图 1-40）的面积差可以小于所给定的一个已知量.

设直角三角的面积为 K，见图 1-41，现在证明圆的面积为K（$S=K$）.

反证法，假设 $S>K$，作边数足够多面积为I_n的圆内接正多边形，使其与圆的面积之差$S-I_n<S-K$，于是有$I_n>K$，实际上，$I_n<K$（因为I_n的边心距d和周长都比直角三角形的高和底小），同理作圆的外切正多边形，可以证明 $S<K$ 会导致矛盾，综上两种情况可

以证明$S=K$，即证明了$S=\frac{1}{2}Lr$.

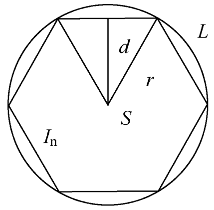


图 1-40

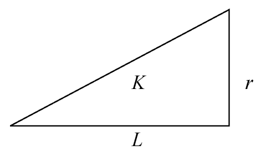


图 1-41

问题 4　任意两个无穷小都能进行阶的比较吗？

两个无穷小的比较有高阶、低阶、同阶、等价等定义，但不是任意两个无穷小都能比较其阶的高低，例如当 $X\to 0$ 时，$a=x\sin\frac{1}{x}$，$\beta=x$ 都是无穷小，但$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在，所以，$\alpha$、$\beta$不能进行比较.

问题 5　在极限的加减运算中，如何利用等价无穷小替换？

加减极限运算利用等价无穷小替换时，必须作为一个整体去替换，例如：

求极限　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+x^2}{x^2}$因为$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，所以

$$\cos x-1=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\cos x-1+x^2=-\frac{1}{2}x^2+x^2+o(x^2)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

问题 6　使用四则运算的计算公式应注意什么？

使用四则运算的公式时，应注意定理的条件，即各公式等号右边的各成员函数的极限必须存在（为有限数），公式才成立，否则会导致错误，例如

$$\lim_{x\to 0}(x^2\cdot\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}x=0$$

但如果如下演算

$$\lim_{x\to 0}(x^2\cdot\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=0$$

就错了，错在$0\cdot\infty$是“未定式”，它不一定等于零，产生错误的原因在于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$为非有限数，误用了乘积的极限公式.

问题 7　若$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)$存在，能否得出$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}v_n$必存在？

若$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)$皆存在，能否断定$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}v_n$皆存在？

若 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)$ 存在，不能确定 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n$ 必存在.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)$ 皆存在，则由于

$$U_n=\frac{1}{2}[(u_n+v_n)+(u_n-v_n)]$$

$$V_n=\frac{1}{2}[(u_n+v_n)-(u_n-v_n)]$$

由极限的四则运算法则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n$ 皆存在

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)+\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)]$$

$$\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)-\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)]$$

问题 8　函数连续性的几何描述是什么？

假设函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则在 $y=f(x)$在$[a,b]$上的图像是一条连绵不断而没有间断点的曲线. 因此，初等函数的基本特征：在函数有定义的区间内，初等函数的图形是不间断的.

问题 9　表示函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续的公式 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 是否可以写成：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim_{x\to x_0}x)$$

可以，这表明对于连续函数 $y=f(x)$而言，函数符号 f 与极限符号 lim 可以交换位置，因此当我们求初等函数在其定义区间内某点的极限时，只需求该点的函数值即可，这一点在求极限时很有用.

问题 10　椅子问题.

（1）问题假设

a．椅子四只腿一样长，椅腿与地面接触处可视为一个点，四角的连线呈正方形.

b．地面高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断（没有像台阶那样的情况），即地面可视为数学上的连续曲面.

c．对于椅腿的间距和椅腿的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子在任何位置至少有三只椅腿同时落地.

（2）问题分析

模型构成的中心问题是用数学语言把椅子四只腿同时着地的条件和结论表示出来.

首先要用变量表示椅子的位置. 注意到椅腿连线呈正方形，以中心为对称点，正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变，于是可以用旋转角这一变量表示椅子的位置. 在图 1-42 中，椅腿连线为正方形 $ABCD$，对角线 AC 与 x 轴重合，椅子绕中心点 O 旋转 θ 角度后，正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置，所以，对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示了椅子的位置.

其次，要把椅腿着地用数学符号表示出来，如果用某个变量表示椅腿与地面的垂直距离，那么当这个距离为零时，就表示椅腿着地，椅子在不同位置时椅腿与地面的距离不同，所以这个距离是椅子的位置变量 θ 的函数.

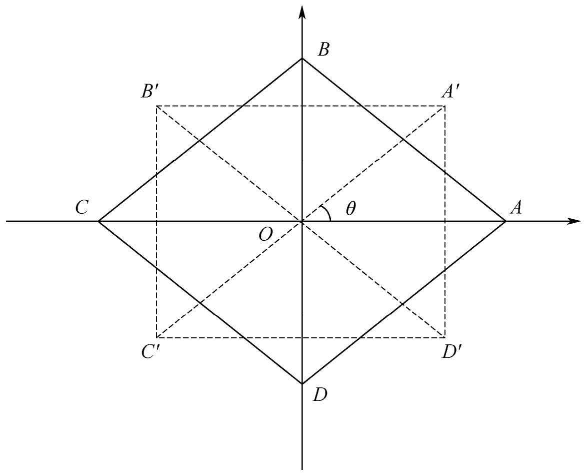


图 1-42

虽然椅子只有四只腿，因而有四个距离，但是由正方形的中心对称性，只要设两个距离函数即可．记 A、C 两只脚与地面的距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两只脚与地面的距离之和为 $g(\theta)$，则 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 皆大于零，由假设 b 知，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 都是连续函数，由假设 c 知，椅子在任何位置至少有三只腿落地，所以对于任意的 θ，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 至少有一个为零，所以，不妨设初始位置 $\theta=0$ 时，$g(\theta)=0$，$f(\theta)>0$，这样，椅子问题抽象成如下数学问题：

已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对于任意的 θ，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，且 $g(0)=0$，$f(0)>0$，则必存在 θ_0，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$，$0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$．

可以看到，引入了变量 θ 和 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 后，就把模型的假设条件和椅脚同时着地的结论用简单、精确的数学语言表述出来了，从而构成了这个实际问题的数学模型.

（3）模型求解

上述命题有多种证法，这里只介绍其中的一种.

将椅子旋转 90°，对角线 AC 与 BD 的位置互换，由 $g(0)=0$、$f(0)>0$ 知，$g(\dfrac{\pi}{2})>0$，$f(\dfrac{\pi}{2})=0$．

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(0)>0$、$h(\dfrac{\pi}{2})<0$．由 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的连续性知：$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$ 也在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续．根据闭区间上连续函数的零点定理知，在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 必存在一点 θ_0 使得 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$．又因为 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$．

由于这个问题非常直观和简单，模型的分析和检验在此略去．这个模型的巧妙之处在于用一元变量 θ 表示了椅子的位置，用 θ 的两个函数表示了椅子的四只腿与地面的距离，至于利用正方形的中心对称性以及旋转 90° 并不是本质的东西.

第十二节 拓展实训

一、阅读材料

哲学角度认识极限法

极限法在现代数学、物理、工程等学科中有着广泛的应用，这是由它本身所固有的思维功能决定的．极限法揭示了变量和常量、无限与极限的对立统一关系.借助极限法，人们可以从有限认识无限，从不变认识变，从直线形状认识曲线形状，从量变认识质变，从近似认识准确.

无限与有限有本质的区别，但两者又有联系：无限是有限的发展.无限个数的和不是一般的代数和，而是把它定义为“部分和”的极限，这就是借助极限法，从有限认识无限.

变与不变反映了事物运动变化与相对静止两种不同的状态，但它们在一定条件下可以相互转化，这种转化是“数学科学的有力杠杆之一”．例如，变速直线运动的瞬时速度无法用初等方法解决，困难在于求解瞬时速度是变量．为此，人们先在小范围内用匀速代替变速，求平均速度，然后把瞬时速度定义为平均速度的极限，这也是借助极限法，从不变认识变.

曲线形状与直线形状有本质的差异，但在一定条件下也可以相互转化，正如恩格斯所说：“直线和曲线在微分中终于统一起来了”．善于利用这种对立统一关系是处理数学问题的重要手段之一．初等方法容易求得直线形状的面积，却难以处理曲线形状的面积，刘徽用圆内接正多边形逼近圆，人们用小矩形的面积和逼近曲边梯形的面积，这还是借助极限法，从直线形状认识曲线形状.

量变和质变既有区别又有联系，两者之间有着辩证关系：量变能引起质变，质和量的互变规律，是辩证法的基本规律之一，在数学研究工作中起着重要的作用．对于任何一个圆内接正边形来说，当它的边数加倍后，得到的还是内接正多边形，是量变而不是质变，但是不断地让边数加倍，经过无限过程后，多边形就变成圆，多边形面积就转化为圆的面积．这便是借助极限法，从量变认识质变.

近似与准确是对立统一的关系，两者在一定条件下也可以相互转化，这种转化是数学应用于实际计算的诀窍，前面所讲到的“部分和”、“平均速度”、“圆内接正多边形的面积”，依次是相应的无穷级数和、瞬时速度、圆面积的近似值，取极限后就可得到相应的准确值，以上全都是借助极限法，从近似认识准确.

二、撰写：研究报告

（一）题目：通过对“连续函数”的学习，简述我对“局部最优之和不等于整体最优”思想的认识.

（二）说明

1.“局部最优之和不等于整体最优”是日本著名企业丰田汽车公司生产方式的核心思想之一，它的基本含义是：企业管理人员要有全局观念；企业各个部门业绩都很优秀，若企业没有有效的协作机制，企业照样运转不畅，甚至亏损或倒闭.

2．请看以下例题：

函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 中三个段函数是初等函数，在其定义域内都是连续函数，但函数在定义域 R 内并不连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，

显然 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在．所以 $x=0$ 为函数的间断点.

若连续函数我们认为是“最优函数”，该分段函数中的三个段函数都属“最优函数”，但函数 $f(x)$ 在 R 内不是“最优函数”.

（三）研究报告中要包含以下内容

1．包含“量变到质变”的哲学（极限）思想.

2．设计一个分段函数（共三段，其中有一段是三角函数，一段是对数函数），每个段函数都是连续函数（最优函数），但整个分段函数在定义域内并不连续（不是最优函数）.

3．结合“团队或班级建设”，谈一谈我对丰田汽车公司生产方式核心思想之一“局部最优之和不等于整体最优”思想的认识.（不少于 500 字）

4．丰田公司的生产方式被称为日本生产方式，它还有哪些重要的核心思想？

5．以上内容要链接顺畅，合乎逻辑；本研究报告不少于 2000 字；以小组为单位完成.

数学实验一 Mathematica 在函数、极限中的应用

实验 1 求 $(\frac{2}{3})^{-2}\times\sin(\frac{\pi}{2})+(13-7)\div 4$ 的值.

解 输入：

```
(2/3)^(-2)*Sin[Pi/2]+(13-7)/4,
```

“Enter”键，得：

$$\frac{15}{4}$$

实验 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 的值.

解 输入：

```
Limit[(1-Cos[x])/x^2,x->0],
```

按“Enter”键，得：

$$\frac{1}{2}$$

第二模块　一元函数微分学及应用

微积分，或者数学分析，是人类思维的伟大成果之一．它处于自然科学与人文科学之间的地位，使它成为高等教育的一种特别有效的工具．遗憾的是，微积分的数学方法有时流行于机械，不能体现出这门学科乃是撼人心灵的智力奋斗的结晶；这种奋斗已经历 2500 多年之久，它深深扎根于人类活动的许多领域，并且只要人们认识自己和认识自然的努力一日不止，这种奋斗将继续不已．

——德国著名数学家 R. 柯朗（1888—1972）

【学习要求】

理解导数、微分的概念，掌握导数的求法；了解三个中值定理，掌握洛必达法则的应用；会判断函数的单调性，凹凸区间及拐点；会求函数的极值，进一步掌握求函数最大值和最小值；熟悉微分（导数）在电工学与机械学中的应用．

第一节　微分的发展与应用

一、何谓“高等数学”

高等数学这个词是从前苏联引进的，欧洲作为高等数学的发源地，并没有这样的说法．这个“高等”是相对于几何（平面、立体、解析）与“初等”数学而言的，从目前的一般高校教学来说，高等数学主要指微积分．一般理工本科学生还需要学习更多一些内容，包括概率论和数理统计、线性代数、复变函数、泛函分析等，这些都可以放到高等数学范畴里．当然这些只是现代数学的基础，不过即使是基础也可以解决很多现实问题．

二、微积分解决了什么

科学的很多分支都是研究对象的运动及其随时间而改变的特性．例如随着球从山上滚下来，它的位置会改变．位置的变化率就是球的速度（瞬时速度）．但是，速度本身也可能会改变．速度的变化率称为加速度．问题是，如果你有一个数学公式能够描述球的位置，那么，你能算出它的速度和加速度吗？几何问题是如何确定平面上的一条曲线在任意点的陡峭度．如果曲线是关于球的位置与时间的图形，那么它的陡峭度就代表球的速度．从阿基米德的时代起，人们就理解了这一点，但是刚开始只知道计算最重要的曲线的陡峭度的近似方法．到 17 世纪后期，牛顿与莱布尼茨分别发展了微积分，这是一些描述图形陡峭度的优美规则及相关思想．这一学科有两个分支．从一条曲线开始，微分会告诉你曲线的陡峭度，而积分能够描述曲线下边的区域面积，出乎意料的是，这两个相反的过程最终由一个被称为微积分基本定理的事实统一起来．

很显然，**微积分是描述一个系统和其他的数学结构如何随时间和空间改变的数学分支**，如从天气、经济学、机械学、生物学等的建模再到量子力学和相对论，数学的多数应用都是以“微分方程”的形式表现的，并利用微积分进行研究，因此求解这一类方程就是对今天的科学家和数学家的一个最大的技术挑战．

物体的瞬时速度、曲线的陡峭度（切线斜率）问题是 17 世纪欧洲科学界的两个重大数学问题——微分学的最基本问题．这一概念打开了通向数学知识与真理的宝库之门．导数与微分统称为微分学．

三、微分（导数）的应用

1．可口可乐易拉罐的设计问题[答案见本模块释疑问答]

问题的提出 日常生活中，我们稍加留意就会发现很多饮料罐（易拉罐）的形状和尺寸几乎都一样，看来，这并非偶然，而应该是某种意义下的最优设计．当然单个易拉罐的生产对资源的充分利用，节约生产成本并不明显，但如果生产的数量非常多，那么，节约的费用就很可观了，试从数学的角度给予合理的解释．

2．变速直线运动问题

【阅读材料】

飞矢不动与瞬时速度

飞矢不动悖论是古希腊数学家芝诺提出的一系列关于运动的不可分性的哲学悖论中的一个．

芝诺问他的学生：“一支射出的箭是动的还是不动的？”

“那还用说，当然是动的．”

“确实是这样，在每个人的眼里它都是动的．可是，这支箭在每一个瞬间都有它的位置吗？”

“有的，老师．”

“在这一瞬间，它占据的空间和它的体积一样吗？”

“有确定的位置，又占据着和自己身体大小一样的空间，老师．”

“那么，在这一瞬间，这支箭是动的，还是不动的？”

“不动的，老师？”

“这一瞬间不动，那么，其他瞬间呢？”

“也是不动的，老师”

“所以射出去的箭是不动的．”

从上述对话中，不难总结出芝诺的诡辩理由：由于箭在飞行过程中的任一瞬间都有一个暂时的位置，所以它在这个位置上和不动没有什么区别．中国古代的名家惠施也提出过“飞鸟之影，未尝动也”的类似说法，错在哪儿？

讨论的问题是动与不动．那么，什么叫动？什么叫不动？一个物体，如果它在两个不同时刻有不同的位置，就说明它在这两个时刻之间动了．如果它在两个不同的时刻之间都有相同的位置，就说明它在这段时间内没动．动与不动，要看它在不同时刻的位置．“每个时刻都没动”是无意义的．“每个时刻都占用确定的位置，是与动和不动没有联系的”．飞矢不动悖论中提到的瞬间动与不动，与物理学中提到的瞬时速度有很大关系．怎样定义瞬时速度，牛顿请来了无穷小来帮忙，导数解决了这个问题．

已知某物体做变速直线运动，位移函数为 $s=s(t)$，求 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$．

（1）做匀速直线运动的物体，在每一时刻速度不变，即瞬时速度等于平均速度，所以瞬时速度等于物体经过的位移除以所花的时间，即 $v=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$．

（2）做变速直线运动的物体，若用 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 计算，得到的是平均速度．显然，在不同的时间间隔里，平均速度是不一样的，因此，瞬时速度不能这样计算．

如何定义和计算瞬时速度呢？17 世纪的学者们进行了大量的研究，然而众说纷纭，难以定论，最终牛顿提出了创造性的思路．

牛顿是这样考虑的：

将一瞬间 t_0 扩展为一个小的时间段 $[t_0, t_0+\Delta t]$

将时间段 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 上的平均速度作为瞬时速度的近似值，即

$$v(t_0)\approx\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

那么，瞬时速度可以定义为：平均速度在某时刻的极限，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

【方法归纳】

物体做变速直线运动的速度虽然是随时间变化的，但在非常短的时间内速度的变化并不大，因而可以近似看作不变的，而且时间取得越短，近似程度就越高．这样一来，**速度变与不变的矛盾，就可以在“时间段很短”这个条件下相互转化．**也就是说，当时间段取得很短时，可以近似地以匀速运动代替变速运动，即**以“平均速度”代替“瞬时速度”；**当时间段取得越来越短，以至于趋向于 0 时，平均速度的极限就等于瞬时速度．

这一过程可以归纳为三步：

（1）把研究的一瞬间扩成一个小时间段 Δt ；

（2）求此时段的平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，作为瞬时速度的近似值；

（3）利用极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 求出精确值．该极限就定义为瞬时速度．

对于一点的问题，扩展到一个小区间上去研究，将变化的情况用不变的特性来近似代替，通过取极限来求得精确值．这反映了人们从近似中去认识精确，从有限中去认识无限的辩证唯物主义认识过程．

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 稍显复杂，数学上常将其记为相对简单的符号 $s'(t_0)$，即

$$s'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

因此，对于一般的函数 $y=f(x)$，我们给出其在一点处导数的定义．

第二节　函数的局部变化率——导数

学习内容：导数的概念

目的要求：理解导数的定义，会求函数在某点的导数，掌握基本求导公式，会求函数的导函数，理解导数的几何意义，了解可导与连续的关系；熟练掌握基本初等函数的导数公式、重点掌握导数的四则运算法则，能够熟练运用导数的四则运算法则计算部分初等函

数的导数.

重点难点：导数的概念，导数的四则运算

一、导数的定义

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时，相应的函数取得增量 $\Delta y=f(x_0+x)-f(x_0)$，如果当 $\Delta x\to 0$ 时，比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 极限存在，则称函数 $y=f(x)$ **在点** x_0 **处可导**，并称此极限值为**函数** $f(x)$ **在** x_0 **处的导数**，记为 $f'(x_0)$ 或 $y'\big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**不可导**.

在上面定义中，若记 $x=x_0+\Delta x$，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

从定义 1 中可以看出，**导数的本质就是增量比** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ **的极限.**

定义 2 若函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点都可导，就称函数 $f(x)$ **在开区间** I **内可导**．这时，对于任一 $x\in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值．这样就构成了一个新的函数，这个函数称为函数 $f(x)$ 的**导函数**，简称**导数**，记作 $f'(x)$ 或 y' 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

由于导数本身是极限, 而极限存在的充分必要条件是左右极限存在且相等, 因此 $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件是左、右极限

$$f_-'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{及} f_+'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

都存在且相等．这两个极限分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**左导数**和**右导数**，记作 $f_-'(x_0)$ 和 $f_+'(x_0)$．即 $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f_-'(x_0)=f_+'(x_0)$.

【关于 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $f'(x)$】

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $f'(x)$ 都是导数（微商）的符号，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是莱布尼茨引入的符号，而 $f'(x)$ 是法国的拉格朗日使用的符号．为解析学打下基石的法国人柯西则是两种符号都用.

几乎所有的科学现象必须用微分学来描述．为什么在科学上，经常出现根据时间变化而出现膨胀和收缩呢？那是因为这个膨胀的速度其实是个导数值. 牛顿建立了运动方程（微分方程）来描写天体的运动，只要解出微分方程，就可以了解天体的运动规律和轨道.

例题 1 求 $y=3x^2$ 的导数 y'，并求 $y'\big|_{x=1}$.

解 先求函数的导数.

对任意点 x，当自变量的改变量为 Δx，则相应的 y 的改变量

$$\Delta y = 3(x+\Delta x)^2 - 3x^2 = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 .$$

由导数的定义知：

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0}\frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(6x + 3\Delta x) = 6x .$$

由导函数再求指定点的导数值：$y'|_{x=1} = 6x|_{x=1} = 6$.

【衔接专业】电流的大小是用单位时间内通过导线横截面的电量的多少来描述的，若电量 q 与时间 t 的关系为 $q = q(t)$ 则

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t_0+\Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$$

上式仅表示在 Δt 时间内导线中的平均电流（即 q 对 t 的平均变化率），那么某时刻 t_0 的电流为 $i(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{q(t_0+\Delta t) - q(t_0)}{\Delta t} = q'(t_0)$.

二、基本初等函数的导数公式（公式中要求 $a>0, a\neq 1$ ）

（1）$C' = 0$ ；

（2）$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ ；

（3）$(a^x)' = a^x \ln a$ ；

（4）$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ ；

（5）$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ ；

（6）$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ ；

（7）$(\sin x)' = \cos x$ ；

（8）$(\cos x)' = -\sin x$ ；

（9）$(\tan x)' = \sec^2 x$ ；

（10）$(\cot x)' = -\csc^2 x$ ；

（11）$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$ ；

（12）$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$ ；

（13）$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ；

（14）$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ；

（15）$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ ；

（16）$(\mathrm{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

三、导数的几何意义

莱布尼茨是在研究一般曲线的切线问题时给出导数的初步定义的，莱布尼茨从曲线的割线入手，探讨割线和切线的关系.

观察图 2-1，已知函数 $y = f(x)$ 的图形为连续曲线，M_0 为曲线上给定的点，坐标为 $M_0(x_0, f(x_0))$ ，给定自变量的增量 Δx ，当 $x = x_0 + \Delta x$ 时，$y = f(x_0+\Delta x)$ ，对应着曲线上另一点 M ，坐标为 $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ ，连接点 M_0 和 M ，得割线 M_0M ，割线 M_0M 与 M_0 点处的切线之间有什么联系呢？

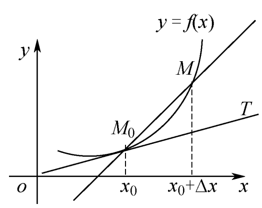


图 2-1

莱布尼茨运用变化的观点和极限的方法来考察这一问题.

当 $\Delta x \to 0$ 时，$x_0 + \Delta x \to x_0$ ，$f(x_0+\Delta x) \to f(x_0)$ ，对应点 M 沿曲线趋近于 M_0 ，带动割线 M_0M 旋转，当点 M 与 M_0 点重合时，割线将旋转到一个特殊的位置，这个位置就定义为切线所在的位置.

后来，经学者们完善，将切线定义为：

当平面曲线 $y = f(x)$ 上任一点 M 沿曲线趋近于切点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 时，割线 M_0M 的极限

就是曲线在点M_0处的切线MT.

而增量比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$恰好表示割线$M_0M$的斜率．由导数的定义知，增量比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限，即函数$y=f(x)$在点$x_0$的导数$f'(x_0)$就是曲线$y=f(x)$在$M_0(x_0,f(x_0))$的切线斜率（曲线在$x_0$的陡峭度）.

由此可分别得到曲线在该点的切线方程和法线方程.

切线方程：$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\ ;$$

法线方程：$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\quad f'(x_0)\neq 0\ .$$

若$f'(x_0)=0$，则切线平行x轴，法线平行y轴.

例题 2　求曲线$y=\cos x$在点$(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$处的切线方程和法线方程.

解　由$(\cos x)'=-\sin x$知$y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=-\sin x\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=-\dfrac{1}{2}$,

故所求切线方程为：$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{6})\ ;$$

法线方程为：$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=2(x-\frac{\pi}{6})\ .$$

【衔接专业】

在电工学中，图 2-2 与图 2-3 表示伏安特性曲线．在物理学中，图 2-4 表示“位移-时间”关系曲线，图 2-5 表示“速度-时间”关系曲线.

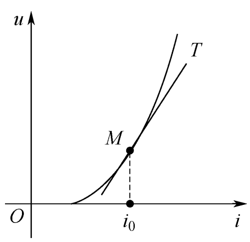


图 2-2

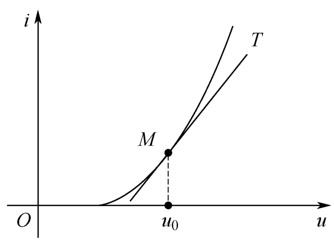


图 2-3

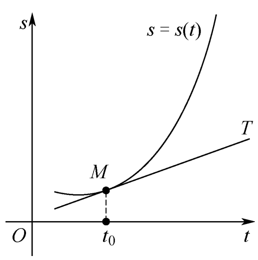


图 2-4

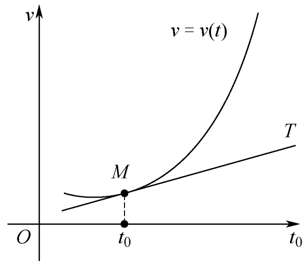


图 2-5

图 2-2 中在点$M(i_0,u(i_0))$处切线的斜率为$u'(i_0)$，表示在点i_0处的电压对电流的变化率——电阻$r(i_0)=u'(i_0)$.

图 2-3 中在点 $M(u_0,i(u_0))$ 处切线的斜率为 $i'(u_0)$，物体在点 u_0 处的电流对电压的变化率——电导 $g(u_0)=i'(u_0)$．

图 2-4 中位移函数 $s(t)$ 在点 $M(t_0,s(t_0))$ 处切线的斜率为 $s'(t_0)$，表示物体在 t_0 时刻的位移的变化率——瞬时速度 $v(t_0)=s'(t_0)$．

图 2-5 中速度函数 $v(t)$ 在点 $M(t_0,v(t_0))$ 处切线的斜率为 $v'(t_0)$，表示物体在 t_0 时刻的速度变化率——加速度 $a(t_0)=v'(t_0)$．

四、可导与连续的关系

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导, 由导数定义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在, 所以, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x)=0$，由连续的定义可知：

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则它在点 x_0 处必连续．反之不成立.

即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，只是它在点 x_0 处可导的必要条件而不是充分条件.

例如　函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但是不可导.

事实上， $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$，

当 $\Delta x<0$ 时， $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$ ；

当 $\Delta x>0$ 时， $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$．

由于左右导数不相等，所以 $y=|x-1|$ 在 $x=1$ 处不可导.

五、导数的四则运算法则

当接触一些比较复杂的函数时，我们还需要借助于导数的四则运算法则，即

定理 1　设函数 $\mu=\mu(x)$， $v=v(x)$ 都是可导函数，则

（1） $\mu(x)\pm v(x)$ 可导，且 $[\mu(x)\pm v(x)]'=\mu'(x)\pm v'(x)$．

（2） $\mu(x)\cdot v(x)$ 可导，且 $[\mu(x)\cdot v(x)]'=\mu'(x)v(x)+\mu(x)v'(x)$．

（3）若 $v(x)\neq 0$，则 $\frac{\mu(x)}{v(x)}$ 可导，且 $\left[\frac{\mu(x)}{v(x)}\right]'=\frac{\mu'(x)v(x)-\mu(x)v'(x)}{v^2(x)}$．

我们只证明乘积的导数运算法则，其他法则可类似证明.

证　设函数 $y=\mu(x)\cdot v(x)$ 在点 x 取得改变量 Δx，相应的 y 的改变量

$$\begin{aligned}\Delta y&=\mu(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-\mu(x)v(x)\\&=\mu(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-\mu(x)v(x+\Delta x)+\mu(x)v(x+\Delta x)-\mu(x)v(x)\\&=[\mu(x+\Delta x)-\mu(x)]v(x+\Delta x)+\mu(x)[v(x+\Delta x)-v(x)].\end{aligned}$$

因为 $\mu=\mu(x)$， $v=v(x)$ 都可导，且可导必连续，于是

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mu(x+\Delta x)-\mu(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+\mu(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\&=\mu'(x)v(x)+\mu(x)v'(x).\end{aligned}$$

加法、乘积法则可推广到有限个函数的情形.

例题 3　已知 $y=x^2-4x-1$，求 y'.

解：$y'=(x^2)'-(4x)'-(1)'=2x-4$.

例题 4　求函数 $y=x\sin x$ 的导数.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x)'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x$.

例题 5　求函数 $y=\frac{\sin x}{x}$ 的导数.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(x)'\sin x-x(\sin x)'}{x^2}=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}$.

【衔接专业】如图 2-6 所示电路中，已知 $R=10\Omega$，$L=2\mathrm{H}$，$i=(4\mathrm{e}^{-3t}-6\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{A}$，试求 u.

解　电阻电压为

$$u_{\mathrm{R}}=Ri=10\times(4\mathrm{e}^{-3t}-6\mathrm{e}^{-2t})=(40\mathrm{e}^{-3t}-60\mathrm{e}^{-2t})\ (\mathrm{V})$$

电感电压为

$$\begin{aligned}u_{\mathrm{L}}&=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=2\times\frac{\mathrm{d}(4\mathrm{e}^{-3t}-6\mathrm{e}^{-2t})}{\mathrm{d}t}\\&=(-24\mathrm{e}^{-3t}+24\mathrm{e}^{-2t})\ (\mathrm{V})\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}u=u_{\mathrm{R}}+u_{\mathrm{L}}&=40\mathrm{e}^{-3t}-60\mathrm{e}^{-2t}-24\mathrm{e}^{-3t}+24\mathrm{e}^{-2t}\\&=(-16\mathrm{e}^{-3t}-36\mathrm{e}^{-2t})\ (\mathrm{V})\end{aligned}$$

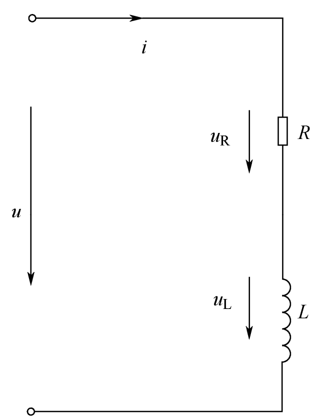


图 2-6

习题 2-2

1．设 $f'(x_0)=A$，用导数定义求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

（2）$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$.

2．求 $y = \sin x$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2}, 1)$ 处切线方程和法线方程.

3．求下列函数的导数：

（1）$y = x^3 - x^2 + 2x - 7$.

（2）$y = \sin x + 2^x + \tan \dfrac{\pi}{3}$.

（3）$y = x^3 - 3\cos x + \mathrm{e}^x$.

（4）$y = (\sin x + \cos x)\ln x$.

（5）$y = \dfrac{\ln x + 2x}{x^2}$.

（6）$y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$.

第三节　求导法则

数学公式有其自身的独立存在性与智慧，它比我们聪明，甚至比它们的发明者也聪明，并且我们从它们中得到的比原来注入的更多.

——德国物理学家赫兹（1857—1894)

学习内容：各类求导法则.

目的要求：掌握复合函数、隐函数、参数方程的求导法则，理解并掌握高阶导数的概念及求法．认识电学中各类复合函数.

重点难点：复合函数的求导法则，高阶导数.

一、复合函数求导法则

定理 1　设函数 $u = \varphi(x), y = f(u)$ 都可导，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

或记作 $[f(\varphi(x))]' = f'(u)\varphi'(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$.

证　设变量 x 有改变量 Δx，相应的变量 u 有改变量 Δu，从而变量 y 有改变量 Δy．由

于函数$u=\varphi(x)$可导，故必连续，即有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$．因

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\qquad(\Delta u\neq 0),$$

所以
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

以上是在$\Delta u\neq 0$时证明的．当$\Delta u=0$时，可以证明上式仍然成立．

复合函数的求导法则可叙述为：复合函数对自变量的导数，等于外层函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数．这一法则又称为链式法则．

例题 1　设$y=\mathrm{e}^{\cos x}$，求y'．

解：设$y=f(u)=\mathrm{e}^u$，$u=\varphi(x)=\cos x$，于是

$$y'=f'(u)\varphi'(x)=(\mathrm{e}^u)'(\cos x)'=-\mathrm{e}^{\cos x}\cdot\sin x.$$

例题 2　设$y=(x^2-3x)^3$，求y'．

解：设$y=f(u)=u^3$，$u=\phi(x)=x^2-3x$，于是

$$y'=f'(u)\phi'(x)=3u^2(x^2-3x)'=3(x^2-3x)^2(2x-3).$$

例题 3　设$y=\sin(3x-2)$，求y'．

解：设$y=f(u)=\sin u$，$u=\phi(x)=3x-2$，于是

$$y'=f'(u)\phi'(x)=\cos u\cdot(3x-2)'=3\cos(3x-2).$$

【方法归纳】由外向内，逐层求导，依次相乘，回代变量．

二、隐函数的导数

显函数：形如$y=f(x)$的函数称为显函数．例如$y=\sin x, y=\ln x+\mathrm{e}^x$．

隐函数：由方程$F(x,y)=0$所确定的函数关系$y=f(x)$称为隐函数．

例如，方程$x+y^3-1=0$确定的隐函数为$y=\sqrt[3]{1-x}$．

如果在方程$F(x,y)=0$中，当x取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的y值存在，那么就说方程$F(x,y)=0$在该区间内确定了一个隐函数．

把一个隐函数化成显函数，叫作隐函数的显化．隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的．但在实际问题中，有时需要计算隐函数的导数．因此，我们希望有一种方法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数来．

注意：隐函数的求导过程如下：

（1）方程$F(x,y)=0$两边同时对x求导，把$F(x,y)$中的y看成是x的函数，利用复合函数的求导法则计算；

（2）解出y'．

例题 6　求由方程$\mathrm{e}^y+xy-1=0$所确定的隐函数y的导数．

解：把方程两边的每一项对x求导数得$(\mathrm{e}^y)'+(xy)'-(1)'=(0)'$，

即
$$\mathrm{e}^y y'+y+xy'=0，\text{从而}\quad y'=-\frac{y}{x+\mathrm{e}^y}(x+\mathrm{e}^y\neq 0).$$

例题 7　求由方程$y^5+2y-x-3x^6=0$所确定的隐函数$y=f(x)$在$x=0$处的导数$y'|_{x=0}$．

解　把方程两边分别对 x 求导数得

$$5y^4y'+2y'-1-18x^5=0$$

由此得
$$y'=\frac{1+18x^5}{5y^4+2}.$$

因为当 $x=0$ 时，从原方程得 $y=0$，所以 $y'|_{x=0}=\frac{1+18x^5}{5y^4+2}|_{x=0}=\frac{1}{2}$.

三、参数方程的求导法则

定理 1　若函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\phi(t)\end{cases}$ 确定，其中 $\varphi(t)$ 与 $\phi(t)$ 可导且 $\phi'(t)\neq 0$，则函数 $y=f(x)$ 可导且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$.

例题 8　求摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解　摆线上 $t=\frac{\pi}{2}$ 的对应点是 $(\pi-2,2)$，又因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

所以
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,$$

从而所求切线方程为 $y-2=x-(\pi-2)$，即 $x-y-\pi+4=0$.

四、高阶导数

一般来说，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的函数，若导函数 $f'(x)$ 还可以对 x 求导数，则称 $f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记作

$$y''\quad 或\quad f''(x)\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}.$$

这时，也称函数 $y=f(x)$ 二阶可导．按照导数的定义，函数 $f(x)$ 的二阶导数应表示为

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 的二阶导数，记作

$$y''\big|_{x=x_0}\quad 或\quad f''(x_0)\quad 或\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}\quad 或\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}.$$

同样，函数 $y=f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 的导数称为函数 $f(x)$ 的**三阶导数**，记作

$$y'''\quad 或\quad f'''(x)\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}x^3}.$$

一般，导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的 **n 阶导数**，记作

$$y^{(n)} \text{ 或 } f^{(n)}(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}.$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数，函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 则称为一阶导数.

根据高阶导数的定义可知，求函数的高阶导数只需对函数一次一次地求导就行了.

例题 9　设 $y=\mathrm{e}^{x^2}$，求 y''，$y''\big|_{x=0}$.

解：先求一阶导数　　$y'=\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x=2x\mathrm{e}^{x^2}$，

再求二阶导数　　$y''=2\mathrm{e}^{x^2}+2x\mathrm{e}^{x^2}\cdot(2x)=2\mathrm{e}^{x^2}(2x^2+1)$，

从而　　$y''\big|_{x=0}=2\mathrm{e}^{x^2}(2x^2+1)\Big|_{x=0}=2$.

【衔接专业】在图 2-7 所示电路中，已知 $R=10\Omega$，$C=0.5\mathrm{F}$，$i_{\mathrm{R}}=6\mathrm{e}^{-4\mathrm{t}}(\mathrm{A})$，试求 i.

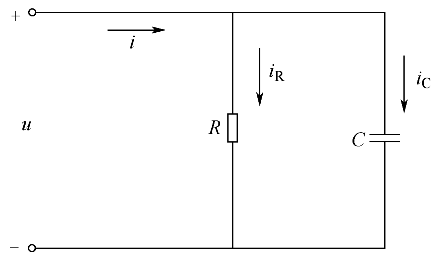


图 2-7

解　电阻电压为

$$u_{\mathrm{R}}=Ri=10\times 6\mathrm{e}^{-4t}=6\mathrm{e}^{-4t}(\mathrm{V})$$

电容电流为

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{C}} &= C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t}=0.5\times\frac{\mathrm{d}(60\mathrm{e}^{-4t})}{\mathrm{d}t} \\ &= -120\mathrm{e}^{-4t}(\mathrm{A}) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} i=i_{\mathrm{R}}+i_{\mathrm{C}} &= 60\mathrm{e}^{-4t}-120\mathrm{e}^{-4t} \\ &= -114\mathrm{e}^{-4t}(\mathrm{A}) \end{aligned}$$

习题 2-3

1．求下列复合函数的导数：

（1）$y=\mathrm{e}^{x+\sin x}$.

（2）$y=(x^4-x)^3$.

（3）$y=\sin(3x^2)$.

（4）$y=\ln(2x^2-3)$.

2．求下列方程确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ：

（1） $x^2+y^2=1$ ；

（2） $\mathrm{e}^{x+y}-xy=1$.

3．求由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+2} \\ y=\dfrac{t}{(t+2)^2} \end{cases}$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4．求下列函数的三阶导数：

（1） $y=\mathrm{e}^{ax}$ （a 为常数）；

（2） $y=\ln(x+2)$.

第四节　函数的微分及应用

在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了. 如果在一个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩, 那就正是在这里.

——弗里德里希 · 冯 · 恩格斯（1820—1895）

学习内容：函数的微分及应用

目的要求：理解微分的概念，掌握微分的基本公式，能熟练求各类函数的微分；理解微分形式的不变性及微分在近似计算中的应用.理解微分是表达“以直代曲”基本思想的基础.

重点难点：微分的概念，微分的运算.

函数的导数表示函数在点 x 的变化率，它描述的是函数在点 x 处变化的快慢程度．在实际工作中经常会碰到这样的问题：当自变量在点 x 处有微小的改变量 Δx 时，计算函数 $y=f(x)$ 的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ ，这个问题看似是简单的减法运算，但是对于复杂的函数表达式，则很不容易求出．因此，需要考虑简单的计算方法来近似求出改变量 Δy ．这就需要引进微分的概念.

【引例】一块正方形金属薄片受温度变化影响时, 其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ ，如图 2-8 所示．问此薄片的面积改变了多少？

解　设边长为 x ，面积为 A ，则 A 是 x 的函数： $A=x^2$ ，薄片受温度变化影响时，面积改变量可以看成当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时，函数 A 相应的增量 ΔA，即

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-{x_0}^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2 .$$

一般说来, 计算函数 $y=f(x)$ 的改变量 Δy 的精确值是较烦琐的．所以，往往需要计算它的近似值，找出简便的计算方法.

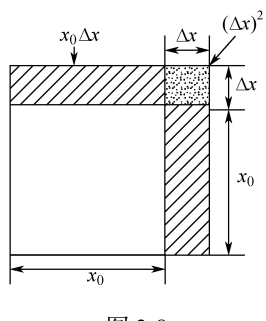


图 2-8

一、微分的概念

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导, 称 $f'(x)\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在 x 处的微分, 记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 或 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x$.

例题 1 求 $y=x$ 的微分.

解 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=x'\cdot\Delta x=\Delta x$，

注：自变量 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 就是自变量 x 的改变量 Δx，因此，函数的微分记作：$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，则有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$.

例题 2 求 $y=x^3$ 的微分.

解 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=(x^3)'\mathrm{d}x=3x^2\mathrm{d}x$.

二、微分基本公式与运算法则

微分基本公式有（公式中要求 $a>0$，$a\neq 1$）：

（1）$\mathrm{d}C=0$（C 为常数）；
（2）$\mathrm{d}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$；
（3）$\mathrm{d}a^x=a^x\ln a\mathrm{d}x$；
（4）$\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；
（5）$\mathrm{d}\log_a x=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$；
（6）$\mathrm{d}\ln x=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；
（7）$\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x$；
（8）$\mathrm{d}\cos x=-\sin x\mathrm{d}x$；
（9）$\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\mathrm{d}x$；
（10）$\mathrm{d}\cot x=-\csc^2 x\mathrm{d}x$；
（11）$\mathrm{d}\sec x=\sec x\cdot\tan x\mathrm{d}x$；
（12）$\mathrm{d}\csc x=-\csc x\cdot\cot x\mathrm{d}x$；
（13）$\mathrm{d}\arcsin x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；
（14）$\mathrm{d}\arccos x=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；
（15）$\mathrm{d}\arctan x=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；
（16）$\mathrm{d}\,\mathrm{arc}\cot x=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

运算法则有：

（1）$\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{d}f(x)\pm\mathrm{d}g(x)$；

（2）$\mathrm{d}[f(x)g(x)]=g(x)\mathrm{d}f(x)+f(x)\mathrm{d}g(x)$；

（3）$\mathrm{d}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{g(x)\mathrm{d}f(x)-f(x)\mathrm{d}g(x)}{[g(x)]^2}$.

例题 3 求下列函数的微分：

（1）$y=x^2\sin x$；（2）$y=\cos(x^2+1)$.

解：（1）$\mathrm{d}y=(x^2\sin x)'\mathrm{d}x=(2x\sin x+x^2\cos x)\mathrm{d}x$

（2）$\mathrm{d}y=-\sin(x^2+1)\mathrm{d}(x^2+1)=-2x\sin(x^2+1)\mathrm{d}x$.

【引进微分是多余吗】 虽然可微与可导是等价的, 但引进微分并不是多余的, 这是因为, 从定义可知, 微分 $f'(x_0)\Delta x$ 可近似表示函数增量Δy, 比直接计算Δy 要方便和快捷；在积分学中, 微分是表达“以直代曲”基本思想的基础, 也是表达和计算不定积分的重要工具.

三、微分用于近似计算

由微分的定义可知，当函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处可导，且 $|\Delta x|$ 很小时，有

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x \tag{1}$$

进而得

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{2}$$

记 $x = x_0 + \Delta x$，则

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

在上述近似公式中，（1）式可以近似计算函数改变量，用在点 x_0 的微分 $f'(x_0)\Delta x$ 近似计算函数在点 x_0 的改变量 Δy；(2）式是近似计算函数值，用在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$ 与其微分之和来近似计算函数在点 $x_0 + \Delta x$ 的函数值 $f(x_0 + \Delta x)$；(3）式是近似计算在点 x 的函数值 $f(x)$，这正是用 x 的线性函数 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来近似表示函数 $f(x)$.

例题 4　半径为 20cm 的钢球加热后，半径增加了 0.05cm，问此时钢球体积大约增加了多少？

解　用 V, r 分别表示钢球的体积和半径，则 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$，因为增大的体积等于两个体积之差，所以问题就是求函数 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ 当 r 自 $r_0 = 20$ 取得 $\Delta r = 0.05\text{cm}$ 时的近似值.

因此，$\Delta V = \mathrm{d}V = 4\pi r_0^{\ 2}\Delta r$，代入数值计算得：

$\Delta V = 4\pi \times 20^2 \times 0.05 = 80\pi(\text{cm}^3)$，即该钢球体积大约增加了 $80\pi(\text{cm}^3)$.

例题 5　计算 $\sqrt[3]{1.01}$ 的近似值.

解　$\sqrt[3]{1} = 1$，令 $f(x) = \sqrt[3]{x}$，$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$，取 $x_0 = 1$ 则

$\sqrt[3]{1.01} = f(1.01) \approx f(1) + f'(1)(1.01 - 1) = 1 + \dfrac{1}{3} \times 0.01 \approx 1.033$.

习题 2-4

1．选取适当函数填入括号内，使下列等式成立：

（1）$2\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad\qquad)$；　　（2）$3x^2\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad\qquad)$；

（3）$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad\qquad)$；　　（4）$\dfrac{3}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad\qquad)$；

（5）$\dfrac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad\qquad)$；　　（6）$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad\qquad)$；

（7）$\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad\qquad)$；　　（8）$\cos 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad\qquad)$；

（9）$\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad\qquad)$；　　（10）$\sec x \cdot \tan x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad\qquad)$.

2．求下列函数的微分 $\mathrm{d}y$：

（1）$y = \mathrm{e}^x + x^3$；

（2）$y = 2\sin x + x^3$；

（3） $y = x(\sin x + \cos x)$ ；

3．近似计算 $e^{1.002}$ 的值.

4．近似计算 $\ln 0.97$ 的值.

第五节　微分中值定理

学习内容：微分中值定理.

目的要求：通过学习，使同学们熟练掌握罗尔定理和拉格朗日定理的内容，并且会灵活运用罗尔定理判断方程的根的存在问题，运用拉格朗日定理证明不等式.

重点难点：拉格朗日定理的应用，灵活运用罗尔定理和拉格朗日定理.

导数是刻画函数在某一点处变化率的数学模型，它反映了函数在这一点处的局部变化性态．而函数的变化趋势以及图像特征是函数在某区间上的整体变化性态．微分中值定理是在理论上给出函数在某区间的整体性质与该区间内部一点的导数之间的关系．由于这些性质都与区间内部的某个中间值有关，因此被统称为中值定理.

1．罗尔（Rolle）中值定理

定理 1　若函数 $f(x)$ 满足条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3） $f(a) = f(b)$.

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ，使得 $f'(\xi) = 0$.

罗尔定理的几何意义是：如果连续曲线除端点外处处都有不垂直于 x 轴的切线，且两端点处的纵坐标相等，那么其上至少有一条平行于 x 轴的水平切线，如图 2-9 所示.

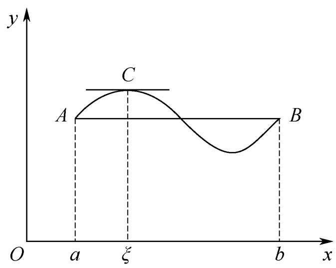


图 2-9

例题 1　验证函数 $f(x) = x^2 - 3x - 4$ 在区间 $[-1,4]$ 上是否满足罗尔定理的条件, 若满足, 试求罗尔定理中 ξ 的值.

解　$f(x) = x^2 - 3x - 4$ 在 $[-1,4]$ 上连续，且在 $(-1,4)$ 内可导，又 $f(-1) = f(4) = 0$ ．所以 $f(x)$ 在 $[-1,4]$ 上满足罗尔定理条件.

由于 $f'(x)=2x-3$，令 $f'(x)=2x-3=0$，解得 $x=\frac{3}{2}\in(-1,4)$，即 $\xi=\frac{3}{2}$.

例题 2　设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 说明方程 $f'(x)=0$ 有几个根, 并说出根所在的范围.

解：函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 在闭区间 $[1,2],[2,3],[3,4]$ 上连续，在开区间 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 内可导，且 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$.由罗尔定理知，方程 $f'(x)=0$ 在 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 每一区间内至少存在一个根，而方程 $f'(x)=0$ 的根小于等于 3 个.

所以方程 $f'(x)=0$ 有 3 个根，根所在的范围分别为 $(1,2),(2,3),(3,4)$.

注意　罗尔定理的 3 个条件只是充分条件，不是必要条件. 即若满足定理中 3 个条件，结论一定是成立的；反之，若不满足定理的条件，结论仍然有可能成立.

例如 $y=f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ ，在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 可导， $f(3)=5$ $f(0)=2\neq$，而 $f'(1)=0$.

在罗尔定理中，条件 $f(a)=f(b)$ 比较特殊，若把这个条件去掉并相应地改变结论，就得到了微分学中十分重要的拉格朗日中值定理.

2. 拉格朗日（Lagrange）中值定理

定理 2　若函数 $f(x)$ 满足条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导.

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理的几何意义：如果连续曲线除端点外处处都有不垂直于 x 轴的切线，那么其上至少有一条平行于连接两端点的直线的切线，如图 2-10 所示.

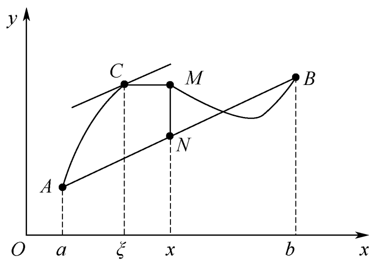


图 2-10

【注意】中值定理的条件能否增加、减少呢？

1. 任何定理增加条件，结论自然是成立的，这样似乎没有必要. 但有时为了书写简便，便于记忆或简化证明，而将条件增加. 如果将微分中值定理的条件改为：函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导（因为可导一定连续）则微分中值定理的叙述将更简便一些，也便于记忆.

2. 定理的条件限制是不能减少的.

关于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有一点 C 不连续，那么不能保证结论一定能成立.

此时曲线上，使其切线平行于弦 AB，因此，关于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的条件是不能减少的.

关于 $f(x)$ 开闭区间 (a,b) 内有一点 C 不可导，那么不能保证结论一定成立.

此时，在曲线上找不到一点，使过该点的切线平行于 AB，因此，关于 $f(x)$ 在 (a,b) 可导的条件也是不能减少的.

推论 1 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则在 (a,b) 内，$f(x)$ 是一个常数.

证 在区间 (a,b) 内任取两点 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$，则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，所以有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \qquad (x_1<\xi<x_2)$$

又因 $f'(\xi)=0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$，即 $f(x_2)=f(x_1)$.

由 x_1，x_2 的任意性可知，函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是一个常数.

推论 2 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，且对任意的 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)\equiv g'(x)$，则在 (a,b) 内，$f(x)=g(x)+C$，其中 C 为常数.

证 由假设条件知，对任意的 $x\in(a,b)$，有 $[f(x)-g(x)]'=0$，由推论 1 可知，有 $f(x)-g(x)=C$（常数），即 $f(x)=g(x)+C$.

例题 3 证明 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad x\in(-1,1)$.

证 设函数 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$. 则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导，且 $f'(x)=0$，由推论 1 可知，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内恒等于一个常数 C，即 $x=0$ 时，$f(0)=\dfrac{\pi}{2}=C$，所以 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

习题 2-5

1．验证下列函数满足罗尔定理的条件，并求出定理中的 ξ.

（1） $f(x)=x^2-x-2, x\in[-1,2]$

（2） $f(x)=x\sqrt{2-x}, x\in[0,2]$.

2．验证下列函数满足拉格朗日中值定理的条件，并求出定理中的 ξ.

（1） $f(x)=2\ln x, x\in[1,\mathrm{e}]$；

（2） $f(x)=2-x^2, x\in[0,3]$.

3．证明恒等式 $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

4．设 $f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)$，用罗尔定理说明方程 $f'(x)=0$ 有几个根，并说出根所在的范围.

第六节　计算未定式极限的一般方法——洛比达法则

数学中一些美的定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏得很深. 数学是科学之王.

——德国数学家高斯（1777—1855）

学习内容：洛比达法则

目的要求：理解洛必达法则的含义，能熟练应用洛必达法则求各种类型的不定式的极限.

重点难点：利用洛必达法则求未定式的极限.

【引例】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

在某一变化过程中，两个无穷小之比或两个无穷大之比的极限可能存在，也可能不存在，我们称这类极限为未定式. 记为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 应用初等方法求这类极限有时会比较困难. 本节利用中值定理推出一种有效的求未定式极限的方法，即洛必达法则.

一、“$\dfrac{0}{0}$”型未定式的洛必达法则

定理 1　如果函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足：

（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$；

（2）在点 a 的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）.

则必有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）.

洛必达法则：这种在一定条件下通过分子分母分别求导数再求极限来确定未定式极限值的方法称为洛必达法则.

例题 1　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

解　方法一（因式分解）：原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

方法二（洛必达法则）：原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)'}{(x-2)'}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{1}=4$.

例题 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}$.

说明 使用一次洛必达法则后，如果$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍是满足定理条件的未定式，则可继续使用洛必达法则.

二、“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式的洛必达法则

定理 2 如果函数$f(x)$及$g(x)$满足：

（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$；

（2）在点a的某去心邻域内可导，且$g'(x)\neq0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$）.

则必有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$）.

例题 3 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x^2}$.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x^2}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x+2}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x(x+2)}=0$.

例题 4 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x}$.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$

【方法归纳】利用洛必达法则求极限时应注意以下几点：

（1）洛必达法则只适用于$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型.

（2）如果$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍是满足定理条件的未定式，则可继续使用洛必达法则.

（3）当$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$的极限不存在时，并不能断定$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$也不存在，这只能说明这个法则失效，尝试用其他方法求极限. 例如$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}}$是$\dfrac{0}{0}$型，对它一直使用洛必达法则，仍然是$\dfrac{0}{0}$型.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-2x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-2x}}=\frac{1}{2^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-2x}}$$
$$=\cdots=\frac{1}{2^n}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-2x}}=\cdots$$

此时，洛必达法则失效，但不能断定极限不存在，事实上

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-2x}}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

三、其他类型未定式（$0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$）

例如，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$（$\dfrac{0}{0}$型），$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\ (n>0)$（$\dfrac{\infty}{\infty}$型），$\lim\limits_{x\to+0}x^n\ln x\ (n>0)$（$0\cdot\infty$型），$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$（$\infty-\infty$型），$\lim\limits_{x\to+0}x^x$（$0^0$型），$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$（$1^\infty$型），$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+a^2)^{\frac{1}{x^2}}$（$\infty^0$型）对于$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$型未定式的求极限问题，可以经过适当的初等变换将它们转化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式来计算．一般方法是（1）$0\cdot\infty$转化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型；（2）$\infty-\infty$型用通分法．

例题 5　求$\lim\limits_{x\to\infty}x(\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}-1)\ (n>0)$．

解：$\lim\limits_{x\to0^+}x(\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}-1)\overset{(0\cdot\infty)}{=}2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}-1)}{\dfrac{2}{x}}=2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}(\dfrac{2}{x})'}{(\dfrac{2}{x})'}=2\mathrm{e}^0=2$．

例题 6　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$．

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x}=0$．

【洛必达法则不是洛必达发明的】

1691 年约翰 · 伯努利（1677—1748）来到巴黎．在此期间他会见了马奎斯 · 德 · 洛必达（1661—1704）(法国数学家)，并于 1691—1692 年间为其讲授微积分．在这期间，伯努利与洛必达达成了一项协议，按照协议伯努利为洛必达提供微积分材料，以获取报酬．之后，伯努利离开了巴黎，并返回了瑞士巴塞尔，但与洛必达保持着书信联系．随后在 1696 年洛必达整理出版了这些资料，书名为《用于了解曲线的无穷小分析》．在这本书中首次出现了“洛必达法则”，这个法则实际上是伯努利发明的，但是这个名称在微分学中从此就固定了下来．在此书的前言中，洛必达表达了对伯努利和莱布尼茨的感谢，他写道“我无偿地使用了他们的发现，所以只要他们愿意，我真诚地把他们要求拥有的任何东西归还他们”．

由于他们之间有过协议，伯努利未在洛必达去世之前向公众说明真相．洛必达死后，他认为他可以把他的那些发现公布于众了，1704 年，他在《学识学报》公布了这一消息，但由于这一做法出现在洛必达死后，在这个问题上云雾重重，人们无法对历史予以评判，大多数学家都保持了沉默．

习题 2-6

1．用洛必达法则求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$；　　　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$；

（6）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin 1}{x-1}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$；

（8）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-1}{\mathrm{e}^x}$；

（9）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^3+x}{2\mathrm{e}^x}$；

（10）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{x^3}$；

（11）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-2x+5}$；

（12）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+2x-3}{3x^3-4x+1}$.

第七节　函数的性态分析——函数的单调性与极值

学习内容：函数的单调性与极值.

目的要求：熟练掌握函数的单调性的判定定理，能够熟练应用函数单调性的判定定理判断各种函数的单调性．熟练掌握函数的极值概念，会利用极值的两个判定定理来求各种函数的极值．理解电工学中函数极值的实际意义.

重点难点：函数单调性的判断和极值的求法.

一、函数的局部性质之一——函数的单调性

函数的导数与函数的性态有什么联系呢？

从几何上可以看出,曲线的单调性与其上各点的切线的斜率密切相关,如果 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加（单调减少），那么它的图形是一条沿 x 轴正向上升（下降）的曲线，如图 2-11 所示.

这时，把图 2-11 中的切线延长．如图 2-12（1）所示，除个别点处作出的切线会平行于 x 轴外，其他的点作出的切线与 x 轴的正向夹角一定是锐角，其正切值大于零．换句话说，单调递增的函数，任取一点求导数，导数一定大于 0（个别点处导数等于零）．单调递减的函数，任取一点求导数，导数一定小于 0（个别点处导数等于零）．如图 2-12 所示.

由此可见，函数的单调性与导数的符号相关.

定理 1 （**函数单调性的判定**）　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

如果函数在定义区间上连续，除去有限个导数不存在的点外导数存在且连续，那么只要用方程 $f'(x)=0$ 的根及导数不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间，就能保证 $f'(x)$ 在各个部分区间内保持固定的符号，因而函数 $f(x)$ 在每个部分区间上单调增加或减少．由此我们可以总结出判别函数增减性的步骤如下：

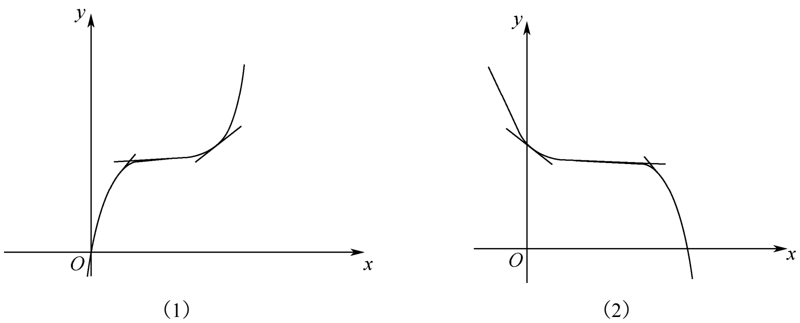


图 2-11

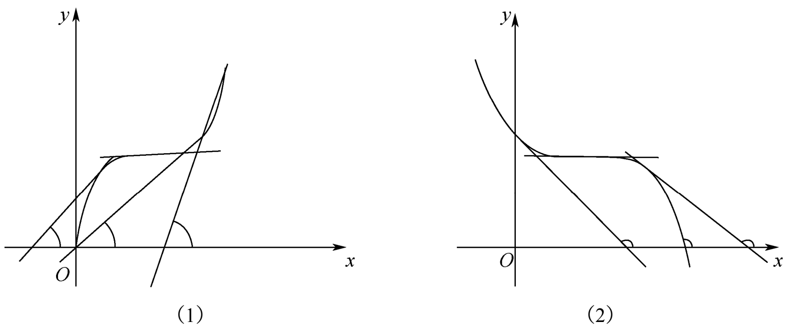


图 2-12

（1）确定函数的定义域；

（2）求出使 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点（**称为临界点**），并以这些点为分界点，将定义域分割成几个子区间.

（3）确定 $f'(x)$ 在各个子区间内的符号，从而判定函数 $y=f(x)$ 的单调性.

一般地，如果 $f'(x)$ 在某区间内的有限个点处为零，在其余各点处均为正（或负）时，那么 $f(x)$ 在该区间上仍旧是单调增加（或单调减少）的.

例题 1　讨论函数 $f(x)=x^3-9x^2-18$ 的单调性.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$． $f'(x)=3x^2-18x=3x(x-6)$．

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0,x_2=6$

以 $x_1=0,x_2=6$ 为分点，将定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成三部分 $(-\infty,0),(0,6),(6,+\infty)$．

因为 $x<0$ 时， $f'(x)>0$，所以函数在 $(-\infty,0)$ 上单调增加；

因为 $0<x<6$ 时， $f'(x)<0$，所以函数在 $[0,6]$ 上单调减少；

因为 $x>6$ 时， $f'(x)>0$，所以函数在 $(6,+\infty)$ 上单调增加.

例题 2　证明：当 $x>1$ 时， $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$．

证明　令 $f(x)=2\sqrt{x}-(3-\dfrac{1}{x})$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(x\sqrt{x}-1).$$

因为当 $x>1$ 时， $f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调增加，

从而当 $x>1$ 时， $f(x)>f(1)$.

由于 $f(1)=0$，故 $f(x)>f(1)=0$，即 $2\sqrt{x}-(3-\frac{1}{x})>0$，

也就是　$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}\ (x>1)$.

上例说明，运用函数的单调性证明代数不等式的关键，在于合理地构造相应的辅助函数，并研究其在相应区间的单调性及在相应的区间端点处的值.

二、函数的局部性质之二——函数的极值

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义， $x_0\in(a,b)$．如果在 x_0 的某一去心邻域内恒有：

（1） $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个**极大值**， x_0 称为 $f(x)$ 的**极大值点**；

（2） $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个**极小值**， x_0 称为 $f(x)$ 的**极小值点**.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值，极大值点、极小值点统称为函数的极值点.

说明　函数的极值仅仅是在某一点的近旁而言的，它是局部性概念．在一个区间上，函数可能有几个极大值与几个极小值，甚至有的极小值可能大于某个极大值．从图 2-13 中可看出，极小值 $f(x_6)$ 就大于极大值 $f(x_2)$.

极值与水平切线的关系：在函数取得极值处（该点可导），曲线上的切线是水平的．但曲线上有水平切线的地方，函数不一定取得极值.

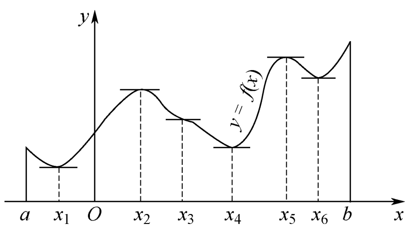


图 2-13

定理 1　**（必要条件）**　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，那么函数在点 x_0 处的导数为零，即 $f'(x_0)=0$.

说明：（1）定理 1 的几何解释是：可微函数的图形在极值点处有水平切线.

（2）定理 1 的条件仅仅是取得极值的必要条件，但不是充分条件.

例如， $f(x)=x^3$，在点 $x=0$ 处有 $f'(0)=0$，但 $x=0$ 并不是函数 $f(x)=x^3$ 的极值点.

使 $f'(x)$ 为零的点（即方程 $f'(x)=0$ 的实根）称函数 $f(x)$ 的**驻点**.

定理 1 就是说：可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是函数的驻点．但反过来，函数 $f(x)$ 的驻点却不一定是极值点.

定理 1 是对函数在点 x_0 处可导而言的，在导数不存在的点，函数可能取得极值，也可能没有极值．例如， $y=x^{\frac{2}{3}}$ 有 $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$， $y'|_{x=0}$ 不存在，但是在 $x=0$ 处函数却有极小值

$f(0)=0$，如图 2-14 所示.

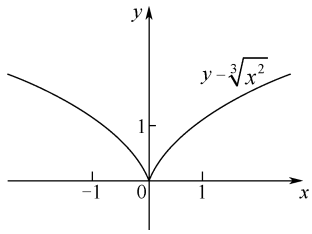


图 2-14

又如 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 有 $y'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$， $y'\big|_{x=0}$ 也不存在，在 $x=0$ 处函数没有极值.

由此可知，函数的极值点必在函数的驻点或连续不可导的点中取得．但是，驻点或导数不存在的点不一定是函数的极值点.

可能极值点的各类情形（在函数 $f(x)$ 的定义区间内）

（1）驻点，即使 $f'(x)=0$ 的点（见图 2-15～2-18）

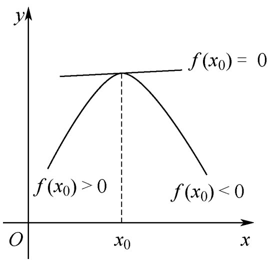


图 2-15　x_0 是极大值点

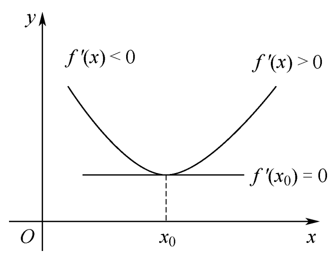


图 2-16　x_0 是极小值点

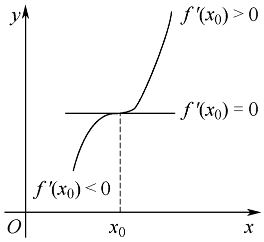


图 2-17　x_0 不是极值点

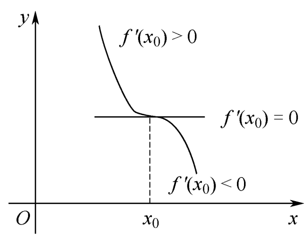


图 2-18　x_0 不是极值点

（2） $f'(x)$ 不存在的点（见图 2-19～图 2-22）

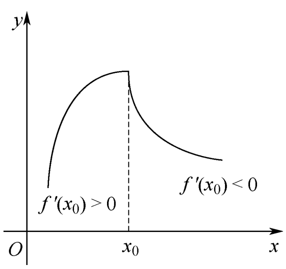


图 2-19　x_0 是极大值点

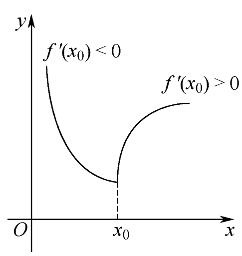


图 2-20　x_0 是极小值点

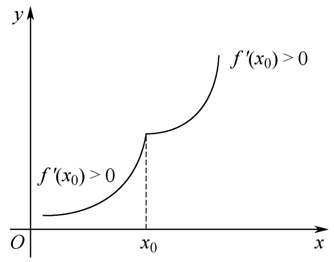


图 2-21　x_0 不是极值点

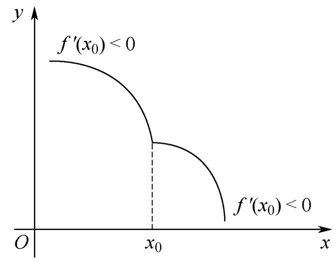


图 2-22　x_0 不是极值点

下面介绍函数取得极值的充分条件，给出函数求极值的具体方法：

定理 2 （**极值的第一充分条件**）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内可导.

（1）当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$，而当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，而当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

（3）当 $x<x_0$ 与 $x>x_0$ 时，$f'(x)$ 不变号，那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

综上所述，应用定理 2 求函数 $f(x)$ 极值点和极值的步骤如下：

（1）求出函数的定义域及导数 $f'(x)$；

（2）令 $f'(x)=0$，求出 $f(x)$ 的全部驻点和导数不存在的点.

（3）列表判断（用上述各点将定义域分成若干个子区间，判定各子区间内 $f'(x)$ 的正、负，以便确定该点是否是极值点）；

（4）求出各极值点处的函数值，确定出函数的所有极值点和极值.

例题 3　求函数 $f(x)=x^3-9x^2-27$ 的极值.

解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=3x^2-18x=3x(x-6)$.

（2）令，得驻点 $x=0, x=6$，这两个点将函数 $f(x)$ 的定义域分成三部分.

（3）列表判断

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	-27	↘	-135	↗

（4）所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值-27；$f(x)$ 在 $x=6$ 处取得极小值-135.

定理 3 （**极值的第二充分条件**）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

极值的第二充分条件适用范围较小．它表明，如果函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$，那么该点 x_0 一定是极值点，并且可以按二阶导数 $f''(x_0)$ 的符号来判定 $f(x_0)$ 是极大值还是极小值．但如果 $f''(x_0)=0$，定理 3 就不能使用了.

例题 4　求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解　（1）$f'(x)=6x(x^2-1)^2$.

（2）令 $f'(x)=0$，求得驻点 $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$　.

（3） $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$.

（4）因 $f''(0)=6>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，极小值为 $f(0)=0$.

（5）因此，用定理 3 无法判别．但由定理 2 知，在 $x=-1$ 的左右邻域内 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处没有极值；同理，$f(x)$ 在 $x=1$ 处也没有极值.

【衔接专业】

例题 5　电工学中交流电压的一种形式是 $u(t)=u_{\mathrm{m}}\sin\omega t$，试在一个周期内讨论其极值情况.

解　函数 $u(t)$ 的最小正周期为 $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$，下面在 $[0,\dfrac{2\pi}{\omega}]$ 内讨论其极值.

令 $u'(t)=u_{\mathrm{m}}\omega\cos(\omega t)=0$，则 $\omega t=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$，即在 $[0,\dfrac{2\pi}{\omega}]$ 内，驻点为 $t_1=\dfrac{\omega}{2\pi}$，$t_2=\dfrac{3\pi}{2\omega}$．同时，没有不可导点.

两个驻点把区间 $[0,\dfrac{2\pi}{\omega}]$ 分成三个小区间，根据在每个小区间内的符号，确定函数的单调性，将所得的结果列成下表

t	$[0,\frac{\pi}{2\omega}]$	$\frac{\pi}{2\omega}$	$(\frac{\pi}{2\omega},\frac{3\pi}{2\omega})$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$(\frac{3\pi}{2\omega},\frac{2\pi}{\omega})$
$u'(t)$	正	0	负	0	正
$u(t)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

由此可知，在 $t_1=\dfrac{\omega}{2\pi}$ 点处取得极大值 $u(\dfrac{\pi}{2\omega})=u_{\mathrm{m}}$；在 $t_2=\dfrac{3\pi}{2\omega}$ 处取得极小值 $u(\dfrac{3\pi}{2\omega})=-u_{\mathrm{m}}$.

习题 2−7

1．求下列函数的单调增减区间：

（1） $f(x)=x^2+2x-2$；

（2） $f(x)=x^3-3x^2+5$；

（3） $f(x)=x-\ln(1+x)$；

2．证明：当 $x>0$ 时，$1+\dfrac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

3．求下列函数的极值：

（1） $f(x)=x^3-9x^2-27$ ；

（2） $f(x)=x-\mathrm{e}^x$ ；

（3） $f(x)=(x^2-3)(x^2-4x+1)$.

第八节　函数性态的进一步分析——函数的最值、凹凸性与曲率

学习内容：函数的最值、凹凸性与拐点.

目的要求：理解函数的最值的定义，掌握函数的最值与极值的关系，熟练掌握函数最值的求法；理解函数曲线的凹凸性与拐点的定义，熟练掌握函数曲线的凹凸性与拐点的求法．理解函数最大值的实际意义.

重点难点：函数最值的求法、曲线凹凸性的判定.

一、函数的最值——函数的整体性质

观察图 2-23（1）～（4）．在图（1）中，函数最大值为极大值，最小值为区间[-2,1]的端点 1 的函数值；在图（2）中函数最大值为区间[-2,1]端点 1 的函数值，最小值为极小值．图（3）中函数最大值为[-2,2]端点-2 的函数值，最小值为端点 2 的函数值；图（4）中函数最大值为极大值，最小值为区间端点[-2,2]端点 2 的函数值.

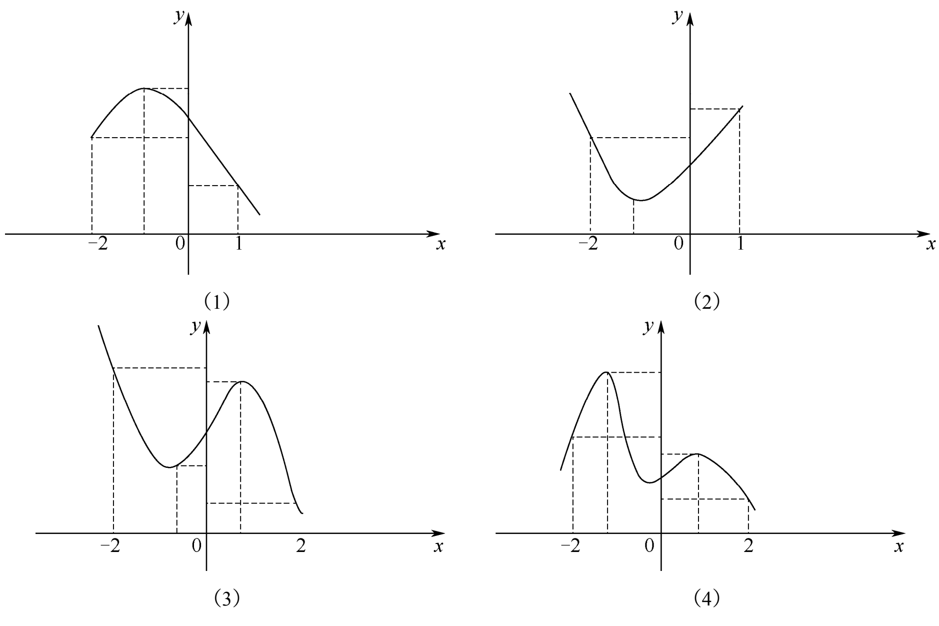


图 2-23

这说明，若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数的最大值和最小值不仅一定存在．而

且函数的最大值和最小值有可能在区间的端点取得，如果最大值不在区间的端点取得，则必在开区间 (a,b) 内取得，在这种情况下，最大值一定是函数的极大值．因此，函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值一定是函数的所有极大值和函数在区间端点的函数值中最大者．同理，函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值一定是函数的所有极小值和函数在区间端点的函数值中最小者．由此可得函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最值的求法和步骤：

（1）求出函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点和不可导点（它们可能是极值点）以及端点处的函数值；

（2）比较这些函数值的大小，其中最大的和最小的就是函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

例题 1　求函数 $f(x)=x^3+2x^2+x+1$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值.

解：因为 $f'(x)=3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=-\dfrac{1}{3}$，

又 $f(-1)=1$；$f(1)=5$，$f(-\dfrac{1}{3})=\dfrac{23}{27}$.

故函数的最大值和最小值分别为 5 和 $\dfrac{23}{27}$.

注意：在解决实际问题时，注意以下结论，会使我们讨论问题显得方便有效.

（1）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 内单调增加（或减少），则 $f(a)$（或 $f(b)$）为最小值，$f(b)$（或 $f(a)$）为最大值.

（2）若函数在讨论的区间（有限或无限，开或闭）内仅有一个极值点，则当它是函数的极大值或极小值时，它就是该函数的最大值或最小值.

（3）在实际问题中，由实际意义分析确实存在最大值或最小值，又所讨论的问题在它所对应的区间内只有一个驻点 x_0，那么不必讨论 $f(x_0)$ 是否是极值，一般就可以断定 $f(x_0)$ 是问题所需要的最大值或最小值.

例题 2（油管铺设）要铺设一石油管道，将石油从炼油厂输送到石油罐装点．炼油厂附近有条宽 2.5 km 的河，罐装点在炼油厂的对岸沿河下游 10 km 处．如果在水中铺设管道的费用为 6 万元/km，在河边铺设管道的费用为 4 万元/km．试在河边找一点 *P*，使管道铺设费最低，如图 2-24 所示.

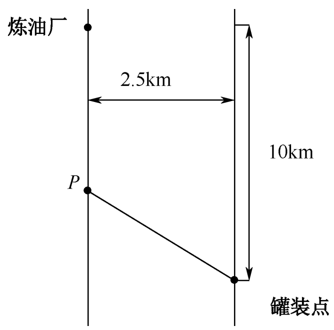


图 2-24

解：设 *P* 点距炼油厂的距离为 x，管道铺设费为 y，由题意有

$$y=4\cdot x+6\times\sqrt{2.5^2+(10-x)^2}\,(0\le x\le 10).$$

现在，问题就归结为：x 在 $[0,10]$ 内取何值时目标函数 y 的值最小.

先求 y 对 x 的导数：

$$y' = 4 - \frac{6(10-x)}{\sqrt{2.5^2+(10-x)^2}}.$$

解方程 $y'=0$，得驻点 $x = 10 \pm \frac{10}{\sqrt{20}}$，舍去大于 10 的驻点，由于管道最低铺设费用一定存在，且在 $(0,10)$ 内取得，所以最小值点为 $x \approx 7.764$（km），代入式 $y = 4\cdot x + 6\cdot\sqrt{2.5^2+(10-x)^2}$ $(0 \leq x \leq 10)$ 中得，$y \approx 51.18$．所以，最低的管道铺设费约为 51.18 万元.

【衔接专业】电路功率匹配问题

设由电动势 E、内阻 r 的电源与外电阻 R 构成闭合电路，如图 2-25 所示．在 r 与 ε 不变时，R 等于多少才能使外电阻 R 上获得的电功率最大？

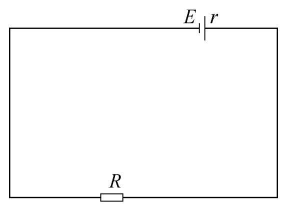


图 2-25

解　消耗在电阻 R 上的功率为 $P=IUR$，其中，I 为回路中的电流，U 为端电压，由欧姆定律知 $I = \frac{E}{R+r}$，所以 $P = \frac{E^2R}{(R+r)^2}(0 < R < +\infty)$.

要使 P 最大应使 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{E^2(R+r)^2 - 2E^2R(R+r)}{(R+r)^4} = \frac{E^2}{(R+r)^3}(r-R) = 0$

解得 $R=r$，此时 $P = \frac{E^2}{4R}$.

由于此闭合电路的最大输出功率一定存在，且在（$0,+\infty$）内部取得．所以必在 P 的唯一驻点 $R=r$ 处取得，因此，当 $R=r$ 时，输出功率最大为 $P = \frac{E^2}{4R}$.

二、曲线的凹凸性与拐点

在研究函数图形特性时，只知道它的上升和下降性质是不够的，还要研究曲线的弯曲方向问题．讨论曲线的凹凸性就是讨论曲线的弯曲方向问题．例如，函数 $y = x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 虽然它们在 $(0,+\infty)$ 内都是增加的，但图形却有显著的不同，$y=\sqrt{x}$ 是向下弯曲的（或凸的）的曲线，而 $y=x^2$ 是向上弯曲的（或凹的）的曲线.

定义 1　若曲线弧位于它每一点的切线的上方，则称此曲线弧是凹的；若曲线弧位于它每一点的切线的下方，则称此曲线弧是凸的.

另外，常见的定义还有：

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1, x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的（或凹弧）；如果恒有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的（或凸弧），如图 2-26 所示.

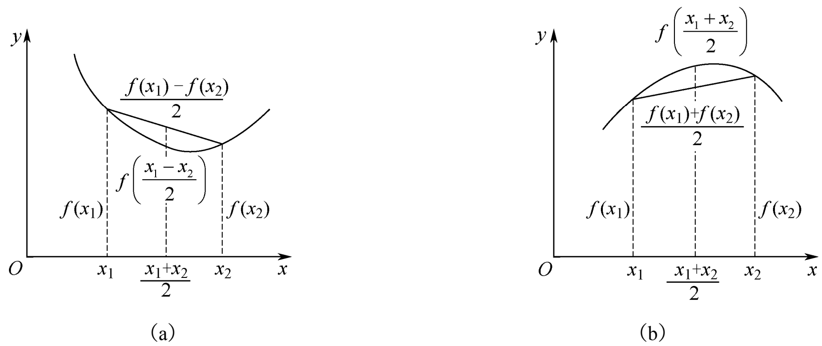


图 2-26

连续曲线 $y=f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点称为这曲线的拐点.

如何判别曲线在某一区间上的凹凸性呢？

由图 2-27 和图 2-28 可以看出，当曲线是凹向时，其切线的斜率呈递增状态，即导函数单调递增；当曲线是凸向时，其切线的斜率呈递减状态，即导函数单调递减.

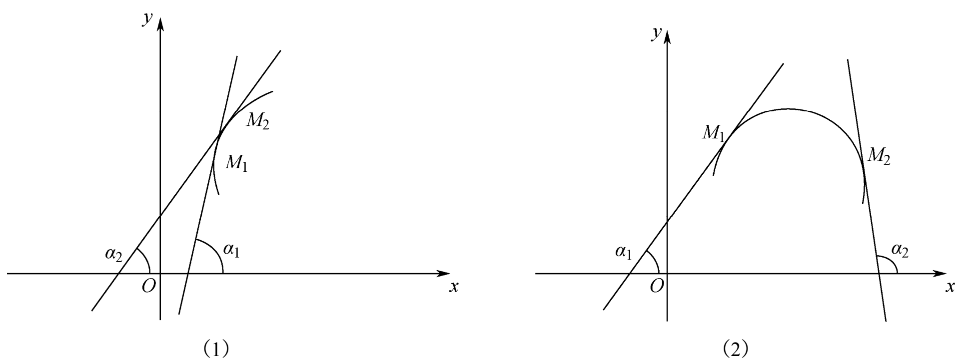


图 2-27

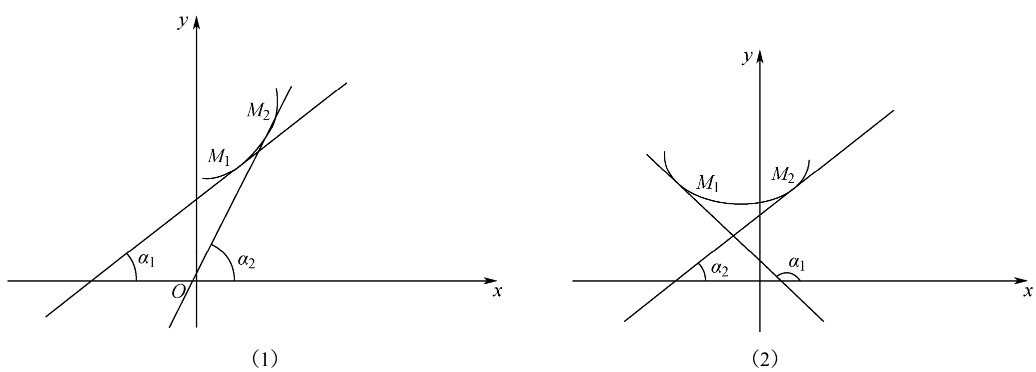


图 2-28

因此，如果函数 $f(x)$ 在 I 内具有二阶导数，那么可以利用二阶导数的符号来判定曲线

的凹凸性，这就是下面的曲线凹凸性的判定定理.

定理 1 （曲线凹凸性的判别法） 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有二阶导数 $f''(x)$，那么若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图形是凹的；若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图形是凸的.

确定曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点的步骤：

（1）求出函数 $y=f(x)$ 的定义域；

（2）求出 $f''(x)=0$ 的点和 $f''(x)$ 不存在的点；

（3）以上各点，把 $f(x)$、$f'(x)$ 的定义域划分成若干子区间，观察各子区间上 $f''(x)$ 的符号，确定凹凸区间和拐点.

例题 3 求曲线 $f(x)=x^4-4x^3+2$ 的凹凸区间及拐点.

解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=4x^3-12x^2,\quad f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2).$$

令 $f''(x)=0$，解得 $x=0,x=2$，用它把定义域分成三个部分区间 $(-\infty,0)$，$(0,2)$，$(2,+\infty)$，列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\cup$	拐点(0,2)	$\cap$	拐点(2,-14)	$\cup$

由上面的讨论可知曲线 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 及 $(2,+\infty)$ 上是凹的，在区间(0,2)上是凸的，曲线上有两个拐点(0,2)和(2,-14).

三、函数图像的描绘

定义 2 如果曲线上的一点沿着曲线远离原点时，该点与某一定直线的距离趋于 0，则称此定直线为曲线的一条**渐近线**.

1）水平渐近线

设曲线 $y=f(x)$ 的定义域为无穷区间，如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$ （或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$），则直线 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

例如，直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线.

2）铅垂渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$），则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅垂渐近线.

例如，$x=2$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x-2}$ 的铅垂渐近线.

我们可以全面地研究函数的性态并画出其图形，具体步骤如下：

（1）确定函数的定义域，讨论函数的奇偶性、周期性；

（2）求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$；

（3）求出方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 在定义域内的全部实根，并求使 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，并用这些点将函数定义域划分成几个部分区间；

（4）列表讨论函数的单调性、极值、凹凸性与拐点；
（5）讨论曲线有无渐近线；
（6）求出曲线与坐标轴的交点及其他辅助点，并描点作图.

例题 4　画出函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解　（1）函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

（2）$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$，$f''(x)=6x-2=2(3x-1)$.

$f'(x)=0$ 的根为 $x=-\dfrac{1}{3}$，$x=1$；$f''(x)=0$ 的根为 $x=\dfrac{1}{3}$.

（3）列表分析：

x	$(-\infty,-1/3)$	$-1/3$	$(-1/3,1/3)$	$1/3$	$(1/3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	∩↗	极大	∩↘	拐点	∪↘	极小	∪↗

（4）当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$y\to-\infty$.

（5）计算特殊点：$f(-1/3)=32/27$，$f(1/3)=16/27$，$f(1)=0$，$f(0)=1$；$f(-1)=0$，$f(3/2)=5/8$.

（6）描点连线画出图形，见图 2-29.

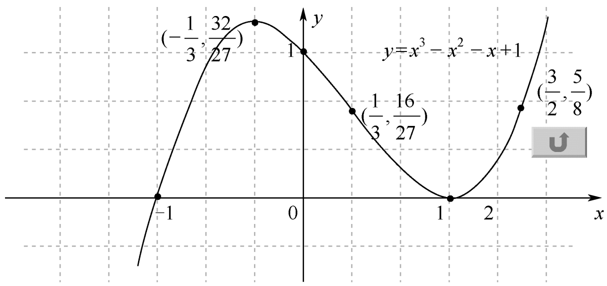


图 2-29

四、曲率的概念

汽车在拐弯时, 坐在车里的人是有感觉的, 特别是在急弯处, 速度快时, 感觉特明显. 我们常说这个弯大，那个弯小，应从两方面说：一方面是指公路的方向改变的大小，如原来向北最后拐向东了, 我们说方向改变 90 °, 另一方面是指在多远的路程上改变了这个角度，如果两个弯都是改变了 90 °，但一个是在 10m 内改变的，一个是在 1000m 内改变的，当然，我们会说前者比后者弯曲厉害．由此可以看出，弯曲程度是由方向改变的大小与在多长一段路程上改变的这两个因素所决定的．并且弯曲程度与方向改变的大小成正比，与改变这个方向所经过的路程成反比.

设 A、B 是曲线 $y=f(x)$ 的两点（见图 2-30），假如曲线在点 x_0 和点 B 的切线与 x 轴的夹角分别为 α 和 $\alpha+\Delta\alpha$，那么，当点从 A 沿曲线 $y=f(x)$ 变到 B 时，角度改变了 $\Delta\alpha$，而改变这个角度所经过的路程则是弧长 $\Delta s=\widehat{AB}$, 我们自然就用比值 $\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right|$ 来刻画曲线段 $A\hat{B}$ 上的弯曲程度，称为平均曲率．为了刻画曲线在某点的曲率，我们有如下定义.

定义　称 $k=\left|\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$，为曲线在点 x_0 处的曲率.

例 1　求半径为 R 的圆的平均曲率及曲率.

解　作图 2-31，$\angle AO'B=\Delta\alpha=\dfrac{\Delta S}{R}$，则 $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta S}=\dfrac{\frac{\Delta S}{R}}{\Delta S}=\dfrac{1}{R}$，为 $\overset{\frown}{AB}$ 的平均曲率．当 $B\to A$ 时，$\Delta s\to 0$，所以，圆上任一点 x_0 处的曲率为

$$k=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{R}=\frac{1}{R}$$

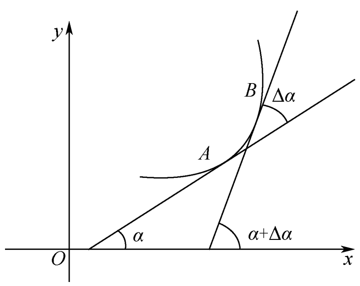


图 2-30

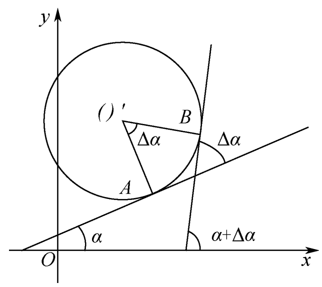


图 2-31

五、曲率的计算公式

设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，则曲线 $y=f(x)$ 在任一点 $M(x,y)$处的曲率计算公式为

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

且点 M 的曲率 k 和以半径为 $R=\dfrac{1}{k}$ 的圆的曲率相同，故以 $R=\dfrac{1}{k}$ 为半径的圆称为曲线在点 M 处的曲率圆，其半径

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为点 M 处的曲率半径.

这说明：曲线上某点处的曲率半径 R 较大时，曲线在该点处的曲率 $k=0$ 就较小，则曲线在该点附近就较平坦；当曲率半径 R 较小时，曲线的曲率 $k=0$ 就较大，则曲线在该点附近就弯曲厉害.

【衔接专业】在铁轨由直道进入圆弧弯道时，由于接头处的曲率突然改变，容易产生事故，为了平稳行驶，往往在直线和圆弧交接处接入一段缓冲曲线（见图 2-32）.

使它的曲率逐步由 0 过渡到 $1/R$(R 为圆弧的半径)，通常采用立方曲线 $y=\dfrac{x^3}{6Rl}$ 作为缓冲线，其中 l 为 $\overset{\frown}{OM}$ 的长度.

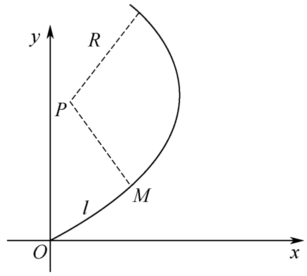


图 2-32

试验证：缓冲曲线弧$\overset{\frown}{OM}$在端点 O 处的曲率为零，并且当$\dfrac{l}{R}$很小时，在M处的曲率为 $1/R$.

解　因为$\overset{\frown}{OM}$的方程为$y=\dfrac{x^3}{6Rl}$，所以$y'=\dfrac{1}{2Rl}x^2$，$y''=\dfrac{1}{Rl}x$，在$x=0$处，$y'=0$，$y''=0$，所以缓冲曲线在O处的曲率为$k_0=0$.

设M点的横坐标为x_0，实际上l与x_0比较接近，即$l\approx x_0$，则有

$$y'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{2Rl}{x_0}^2\approx\frac{1}{2Rl}l^2=\frac{l}{2R}$$

$$y''\big|_{x=x_0}=\frac{1}{Rl}x_0\approx\frac{1}{Rl}l=\frac{1}{R}$$

故在M的曲率为

$$k_{\mathrm{M}}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\approx\frac{\dfrac{1}{R}}{(1+\dfrac{l^2}{4R^2})^{\frac{3}{2}}}$$

因$\dfrac{l}{R}$很小，略去$\dfrac{l^2}{4R^2}$，得$k_{\mathrm{M}}\approx\dfrac{1}{R}$.

综述：在直轨道和圆弧轨道之间接上一段缓冲曲线轨道后，就能使铁路的曲率k从 0 连续地变到$\dfrac{1}{R}$，从而可使列车在转弯时平稳行驶，保障列车安全.

习题 2-8

1．求下列函数的最大值与最小值：

（1）$f(x)=3x^4-4x^3-12x^3+1,x\in[-3,1];$

（2）$f(x)=1-\dfrac{2}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}},x\in[-1,2].$

2．一汽车厂家正在测试新开发的汽车的发动机的效率，发动机的效率 p（%）与汽车的速度 v（千米/小时）之间的关系为 $p=0.768v-0.000\,04v^3$．问发动机的最大效率是多少？

3．讨论下列曲线的凹凸性与拐点：

（1）$y=3x^2-x^3$；

（2）$y=\ln(2+x^2)$；

（3）$y=(x-4)^3$.

第九节　应用实训

随着对数学认识的深入，微分知识在电路分析、工件磨削、带传动、汽车构件原理等机电（械）领域的应用越来越广泛.

一、带传动问题

带传动主要用于两轴平行且回转方向相同的场合，带传动示意图如图 2-33 所示。

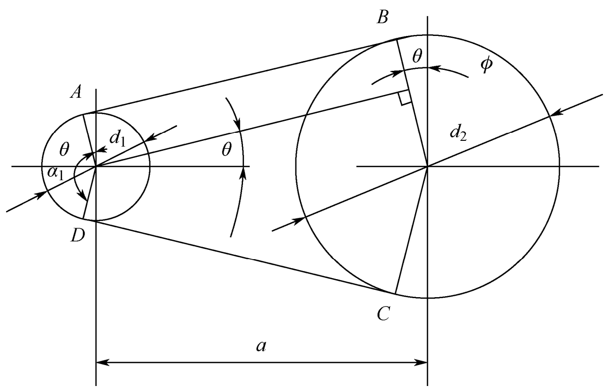


图 2-33　带传动示意图

小轮包角 $\alpha_1=\pi-2\theta$，大轮包角 $\alpha_2=\pi+2\theta$，且，则带长

$$L=2AB+\widehat{AD}+\widehat{BC}=2a\cos\theta+\frac{\pi}{2}(d_1+d_2)+\theta(d_1+d_2)$$

公式中涉及角度 θ，计算不太方便，考虑到 $[\alpha_1]>120^\circ$，可以对上式进行化简．请运用微分知识，得出带长的近似公式 $L(a,d_1,d_2)$，并验算当 $\alpha_1=160^\circ$ 时微分近似公式相对误差绝对值 $|\delta|<1\%$.

解　因 θ 较小，由微分近似公式

$$\theta\approx\sin\theta=\frac{d_2-d_1}{2a}\qquad\cos\theta\approx1-\frac{1}{2}\theta^2$$

代入带长式子并化简，得

$$L \approx 2a + \frac{\pi}{2}(d_1 + d_2) + \frac{(d_1 + d_2)^2}{4a}$$

当 $\theta = 10° = \dfrac{10\pi}{180}$ 时，有

误差 $|\delta_1| = \left|\dfrac{\sin\theta - \theta}{\theta}\right| \approx 0.507\% < 1\%$.

误差 $|\delta_2| = \left|\dfrac{1 - 0.5\theta^2 - \cos\theta}{\cos\theta}\right| \approx 3.92 \times 10^{-5} < 1\%$.

二、电压的改变量问题

如图 2-34 所示，设有一电阻负载 $R = 25\Omega$，现负载功率 P 从 400W 变到 401W，求负载两端电压 u 的改变量的近似值.

解 由电工学知，负载功率 $P = \dfrac{U^2}{R}$，即 $U = \sqrt{RP}$，故

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{P}}\mathrm{d}P$$

所以电压 U 的改变量为

$$\Delta U \approx \mathrm{d}U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{400}} \times 1 = 0.125(\mathrm{V})$$

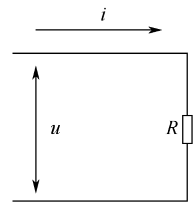


图 2-34

三、自感电动势问题

已知正弦交流电 $i = I_{\mathrm{m}}\sin\omega t$ 在线圈内产生的自感电动势 $\varepsilon_{\mathrm{L}} = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，其中 L 表示线圈的自感系数，i 表示电流强度，公式中的负号表示自感电动势总是阻止电路中电流的变化，试求自感电动势 ε_{L} .

解：

$$\varepsilon_{\mathrm{L}} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -L(I_{\mathrm{m}}\sin\omega t) = -LI_{\mathrm{m}}\omega\cos\omega t$$

$$(\text{运用}\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x)$$

$$= -LI_{\mathrm{m}}\omega\sin(\omega + \frac{\pi}{2}) \;\; (\text{令}x = \omega t + \frac{\pi}{2}, \text{运用} -\sin x = \sin(x - \pi))$$

$$= LI_{\mathrm{m}}\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2} - \pi) = LI_{\mathrm{m}}\omega\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

这说明，自感电动势 ε_{L} 也是一个正弦量，但在相位上，ε_{L} 滞后于电流 i 90°.

四、RCL 串联稳态电路分析

如图 2-35 所示的电阻、电容、电感串联交流电路中，已知电容的电压是 $u_{\mathrm{c}} = u_{\mathrm{m}}\sin\omega t$，

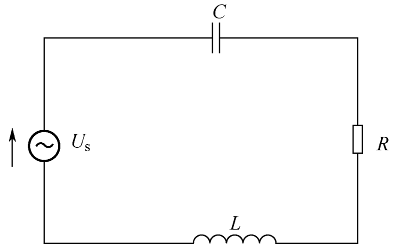


图 2-35

求（1）电容器导线上的电流i；(2) 电阻电压u_{R}；(3) 电感电压u_{L}.

解　(1) 由电工学可知，流过电容器导线的电流为$i=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$，同时，由$Q=Cu_C$，得

$$\begin{aligned} i &= C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=C(u_{\mathrm{m}}\sin\omega t)' \\ &= Cu_{\mathrm{m}}\omega\cos\omega t \quad (\text{运用公式}\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x) \\ &= Cu_{\mathrm{m}}\omega\sin(\omega t+\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

(2) 电阻的端电压为$u_{\mathrm{R}}=R\cdot i$，将i的结果式代入得

$$u_{\mathrm{R}}=Ri=RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=RCu_{\mathrm{m}}\omega\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

(3) 电感的端电压为$u_{\mathrm{L}}=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，将$i=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$代入得

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{L}} &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t})=LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} \\ &= LC(u_{\mathrm{m}}\sin\omega t)'' \\ &= LC(u_{\mathrm{m}}\omega\cos\omega t)' \\ &= LCu_{\mathrm{m}}\omega^2(-\sin\omega t) \quad [\text{公式}\sin(x+\pi)=-\sin x] \\ &= LCu_{\mathrm{m}}\omega^2\sin(\omega t+\pi) \end{aligned}$$

与电容电压$u_{\mathrm{C}}=u_{\mathrm{m}}\sin\omega t$比较，可以看到，电阻电压$u_R=RCu\omega\sin(\omega t+\dfrac{\pi}{2})$的相位角比电容电压 u_{C} 的相位角超前$90°$，电感电压$u_{\mathrm{L}}=LCu_{\mathrm{m}}\omega^2\sin(\omega t+\pi)$的相位角比电容电压 u_{C} 的相位角超前$180°$.

五、PN 结模型问题

具有 PN 结的半导体元件，其电流微变和引起这个变化的电压微变之比称为低频跨导，现有一种 PN 结的半导体元件，其转移特性曲线方程为$I=5U^2$，求电压$U=2\mathrm{V}$时的低频跨导.

解　低频跨导是电流微变和引起这个变化的电压微变之比, 即电压变化引起电流变化的平均变化率，因此在$U=2\mathrm{V}$时的低频跨导为$U=2\mathrm{V}$时的变化率，就是电流对电压的导数

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}U}\Big|_U=2\mathrm{V}=\lim_{\Delta U\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta U}=\lim_{\Delta U\to 0}\frac{5(2+\Delta U)-5\times 2^2}{\Delta U}=20\mathrm{V}.$$

六、电容器的充电和放电问题

如图 2-36 所示是电容器充放电回路（RC 电路），其中 E 是电源的电动势，当开关拨到 a 端时，RC 电路与直流电源接通，电容器充电．当开关拨到 b 端时，电源断开，电容器放电，电容器上电压的变化规律是：充电时，$U_{\rm C}=E(1-{\rm e}^{-\frac{t}{RC}})$，放电时 $U_{\rm C}=E{\rm e}^{-\frac{t}{RC}}$．

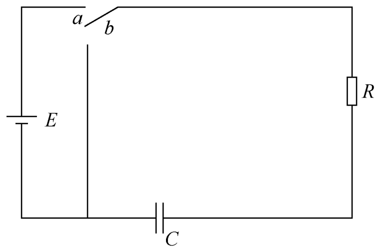


图 2-36

试求：（1）电容器的充电速度和放电速度；（2）电容器充电和放电时电路中的电流；（3）分析电容器电压和电路中的电流 i 的单调性．

解　（1）电容器的充电速度和放电速度就是电容器的充电电压和放电电压 $u_{\rm C}(t)$ 对时间 t 的导数．充电速度为 $u_{\rm C}(t)'=E(1-{\rm e}^{-\frac{t}{RC}})'=E(-{\rm e}^{-\frac{t}{RC}})(\frac{t}{RC})'=\frac{E}{RC}{\rm e}^{-\frac{t}{RC}}$．

分析　因为 t 增大时，${\rm e}^{-\frac{t}{RC}}$ 为单调递减函数，所以，充电速度是按负指数规律衰减的．

当 t=0 时，$u_{\rm C}'(0)=\frac{E}{RC}{\rm e}^0=\frac{E}{RC}$　；

当 t=3RC 时，$u_{\rm C}'(3RC)=\frac{E}{RC}{\rm e}^{-3}\approx\frac{1}{2.71^3}\cdot\frac{E}{RC}\approx 0.05\frac{E}{RC}$　；

这就是说，t=3RC 时的充电速度只有开始时刻的 5%，所以，一般认为经过 3RC 秒后充电就算完成了，RC 称为时间常数，通常用 τ 表示，即 $\tau=RC$．

放电速度为 $u_{\rm C}'(t)=E({\rm e}^{-\frac{t}{RC}})'=-\frac{E}{RC}{\rm e}^{-\frac{t}{RC}}$

（2）由电工学知识知，流过电容器导线的电流为 $i=\frac{{\rm d}Q}{{\rm d}t}=C\frac{{\rm d}u_{\rm C}}{{\rm d}t}=Cu_{\rm C}'(t)$ 其中 $Q=Cu_{\rm C}$

所以充电时电路中的电流 $i=C\frac{E}{RC}{\rm e}^{-\frac{t}{RC}}=\frac{E}{R}{\rm e}^{-\frac{t}{RC}}$，

放电时的电流为 $i=C(-\frac{E}{RC}{\rm e}^{-\frac{t}{RC}})=-\frac{E}{R}{\rm e}^{-\frac{t}{RC}}$．

（3）充电时，电压 $u_{\rm C}(t)$ 的导数．$u_{\rm C}'(t)=\frac{E}{RC}{\rm e}^{-\frac{t}{RC}}>0$，所以 $u_{\rm C}=E(1-{\rm e}^{-\frac{t}{RC}})$ 为单调增加函数．$t\to+\infty$ 时 ${\rm e}^{-\frac{t}{Rc}}\to 0$，$u_{\rm C}\to E$．

放电时，电压 $u_{\rm C}(t)$ 的导数 $u_{\rm C}\,'(t)=E({\rm e}^{-\frac{t}{Rc}})'=-\frac{E}{Rc}{\rm e}^{-\frac{t}{Rc}}$<0，所以 $u_{\rm C}=E{\rm e}^{-\frac{t}{Rc}}$ 为单调递减函数．当 $t\to+\infty$ 时，${\rm e}^{-\frac{t}{RC}}\to 0$，$u_{\rm C}\to$0.

充电时，电流$i=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$；放电时，电流$i=C(-\frac{E}{Rc}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})=-\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$．负号表示放电时电流方向与充电时电流方向相反．讨论电流的单调性时都取正号.

电流的导数$i'(t)=-\frac{E}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}<0$，所以$i=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$为单调递减函数．$t\to+\infty$时，$\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\to 0$，$i\to 0$.

七、工件磨削问题

在机械加工中，工件的曲率半径和磨削工件的砂轮的选择密切相关，要求砂轮的半径不得大于工件内表面的截线上各点处的曲率半径.

1．如图 2-37 所示，工件内表面的截面为抛物线$y=O\cdot 5x^2$，现在要用砂轮磨削其内表面，问用直径多大的砂轮比较合适？

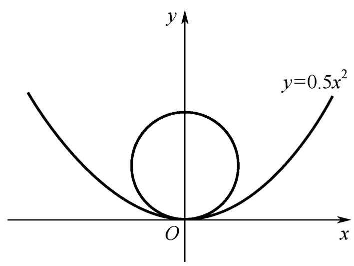


图 2-37

解　为了磨削时不使砂轮与工件接触附近的部分工件磨去太多，砂轮的半径应小于或等于抛物线上各点处曲率半径中的最小值．又因为抛物线在其顶点处的曲率最大，也就是说，抛物线在其顶点处的曲率半径最小．现在求抛物线$y=O\cdot 5x^2$在顶点$O(0,0)$处的曲率半径.

因为$y'=x$，$y''=1$，所以

$$y'|_{x=0}=0\,,\quad y''|_{x=0}=1\,.$$

于是

$$R=\left|\frac{(1+0^2)^{\frac{3}{2}}}{1}\right|=1$$

因此，选用砂轮的半径不得超过 1 单位长，即直径不得超过 2 单位长．因此，对于用砂轮磨削一般工件表面时，也有类似的结论．即选用的砂轮的半径不应超过该工件内表面的截线上各点处曲率半径中的最小值.

2．工件内表面的截面为正弦曲线$y=\sin x$（$x\in(\pi,2\pi]$），找出曲率在哪些位置达到最大值、最小值.

解　正弦曲线$y=\sin x$的曲率.

$$k=\frac{|\sin' x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} \qquad x\in(\pi,2\pi]$$

对曲率 k 求导，有

$$k'=\pm\frac{4\cos x-2\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{5}{2}}}$$

x 属于$[0,\pi]$时取正号，x 属于$[\pi,2\pi]$时取负号．令 $k'=0$ 得 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$，且

$$x\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi] \text{ 时 } k'>0 \text{；}$$

$$x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}) \text{ 时 } k'<0 .$$

说明 $k_{\max}=k(\frac{\pi}{2})=k(\frac{3\pi}{2})=1$，$k_{\min}=k(\pi)=k(2\pi)=0$.

第十节　释疑问答

问题 1　$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 与 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 有何区别与联系？

它们的主要区别有：

（1）从分析观点看：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 不仅和 x_0 有关，而且和 Δx 有关，它实际上是二元函数．可是导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 只与 x_0 有关，不再与 Δx 有关了.

（2）从变化观点看：$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是函数 $y=f(x)$ 对自变量 x 在 Δx 的范围内的平均变化率，而导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是函数 $y=f(x)$ 对自变量 x 在某一点处的变化率.

（3）从几何观点看：$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是曲线 $y=f(x)$ 在两点处的割线的斜率，而导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是曲线 $y=f(x)$ 在一点处的切线的斜率.

（4）从力学观点看：$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是平均速度，而导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是某一时刻的瞬时速度.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 与 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 之间的联系表现为：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha$

其中 α 是关于 Δx 的无穷小.

问题 2　函数 $y=f(x)$ 的导数有哪些常用符号

符号 y'、$f'(x)$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 都是表示函数 $y=f(x)$ 对 x 的导数．符号“ ′ ”与“ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ”

是同一个意思，表示函数对 x 求导．而 $f'(t)$、$f'_u(u+v)$、$f'_v(uv)$ 分别表示函数对 t、u 和 v 的导数．这就是说，$f'(\ )$ 的括号中的字母是什么，就表示对该字母的导数；如果括号中有两个或两个以上字母，就注明足码 u 或 v，表示对 u 或 v 的导数.

问题 3 已知 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，试问 $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ 是否正确？

这个问题初看起来十分简单，同学们可能都认为是正确的，它由公式 $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ 得到．其实，这个问题蕴含着对可导与连续问题的正确理解.

连续仅为可导的必要条件，也就是说连续不一定可导．函数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 是在（-∞,+∞）上的连续函数，它在（-∞,+∞）内是否处处有导数，我们必须分情况讨论．由 $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ 知，它未包含 $x=0$ 处的情形，因而必对 $x=0$ 处加以讨论.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}$ 不存在，所以，函数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处不可导，故导数表示式可修改为

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & (x\neq 0)\\ \text{不存在} & (x=0)\end{cases}$$

问题 4（1）$f'(x_0)=[f(x)]'$ 吗？

（2）$f'(y)=[f(y)]'$ 吗？

（3）$f'_{\pm}(x_0)=f'(x_0\pm 0)$ 吗？

（1）该式不一定成立，左边是求导函数之值，即先求导再求值，其结果不一定为 0，而右边是先求值再求导，常数的导数一定为 0.

（2）当 y 为自变量时，显然有；当 y 为因变量（中间变量）时，则不然．如，$f(y)=y^2$，$y=\sin x$，$f'(y)=2y=2\sin x$；$[f(y)]'=[\sin^2 x]'=2\sin x\cos x$.

（3）$f_-'(x_0)$ 和 $f_+'(x_0)$ 表示 x_0 的左右导数，而 $f'(x_0\pm 0)$ 表示导函数在 x_0 的左右极限.

这是两个不同的概念，二者不一定相等．例 $f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

演算可知：$f_+'(0)=+\infty$，但 $f_+'(0+0)=-1$，两者不相等.

问题 5 初等函数在定义区间上是否都是可导的？

不一定，例如：$y=x^{\frac{1}{3}}$ 在（-∞,+∞）是有定义的，但在 $x=0$ 处不可导．可见初等函数的可导区间是其定义区间的子区间，但如果把广义导数（∞或±∞）考虑在内，则基本初等函数在其定义域内都是可导或广义可导的，但对于一般的初等函数，则可能出现 $0\cdot\infty$，∞/∞ 等未定式，情况比较复杂，甚至连广义可导都不是，因而要具体函数具体分析.

问题 6 函数的改变量 Δy 与微分 $\mathrm{d}y$ 有何区别与联系

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 与微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

是有区别的，主要有：

（1）从分析的观点看：虽然 x_0 与 $\mathrm{d}y$ 都与 x_0 和 Δx 有关，但一般来说，对于给定的 x_0，Δy 是 Δx 的一个复杂函数，而 $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的线性函数.

（2）从几何观点看：在曲线 $y=f(x)$ 上取一点 $M_0(x_0,y_0)$ 及其近旁的点 $M_0(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$（见图 2-38），过 M_0 及 M 作 P_0M_0 及 PM 垂直 Ox 轴，过点 M_0 作平行于 x 轴的直线与 PM 相较于 Q，又作曲线在点 M_0 的切线交 PM 于 T，于是

$$M_0Q=\Delta x \qquad QM=\Delta y \qquad QT=f'(x_0)\Delta x=\mathrm{d}y$$

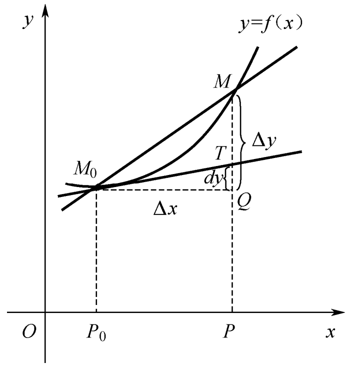


图 2-38

因此，当 Δy 是曲线的纵坐标的改变量时，$\mathrm{d}y$ 就是切线的纵坐标的对应改变量. Δy 与 dy 之差在图形上就是 TM. 一般的，它随 Δx 变小而变小，且比 Δx 变小的速度要快些.

Δy 与 $\mathrm{d}y$ 之间是有联系的，表现为：$\Delta y=\mathrm{d}y+\alpha\Delta x$ 其中，α 是关于 Δx 的无穷小.

因此，可用微分 $\mathrm{d}y$ 来近似地表示改变量 Δy.

问题 7　对数求导的适用范围是什么？有什么好处？

所谓对数求导法就是将一个函数取对数化为一个隐函数，然后利用隐函数求导法求出导数，采用对数求导法的函数类型有：

（1）积商混合式.

（2）积商的乘方或开方以及乘方、开方与积商的混合式.

（3）幂指数函数$[f(x)]^{g(x)}$形式.

由于这几种类型的函数，取对数以后，可使运算级别降低，如积商混合式取对数后化为加减式，积商的乘方、开方取对数后化为线性组合形式，幂指数取对数后化为乘积形式，便于计算，有利于导数的求出.

问题 8　$\mathrm{d}^n x$　　$\mathrm{d}x^n$　　$(\mathrm{d}x)^n$　　$\mathrm{d}(x^n)$ 是否相同？

$\mathrm{d}^n x$ 表示变量 x 的 n 阶微分；$\mathrm{d}x^n=(\mathrm{d}x)^n$ 表示变量 x 的一阶微分的 n 次方，而 $\mathrm{d}(x^n)$ 表示幂函数 $y=x^n$ 的一阶微分，$\mathrm{d}(x^n)=nx^{n-1}\mathrm{d}x$；一般来说，三者都不相同，例如：$x=\mathrm{e}^t$；$\mathrm{d}^n x=\mathrm{d}^n\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t^n$；

$$\mathrm{d}x^n=(\mathrm{d}x)^n=(\mathrm{d}\mathrm{e}^t)^n=(\mathrm{e}^t\mathrm{d}t)^n=\mathrm{e}^{nt}\mathrm{d}t^n；$$

$$\mathrm{d}(x^n)=\mathrm{d}[(\mathrm{e}^t)^n]=\mathrm{d}\mathrm{e}^{nt}=n\mathrm{e}^{nt}\mathrm{d}t.$$

第十一节　拓展实训

一、阅读材料

理查三世的战马

理查三世于 1458 年在博斯沃思战役中被击败，这场战役决定了谁将是英国的统治者. 战役进行的当天早上,理查三世派了一个马夫为自己喜欢的战马钉掌. “快点给它钉掌,” 马夫对铁匠说，“国王希望骑着它打头阵.” “你得等等,” 铁匠回答，“我前几天给国王全军的马都钉了掌，现在我要找点铁片来.” “我等不及了,” 马夫不耐烦地叫道，“敌人正在推进，我们必须在战场上迎击敌兵，有什么你就用什么吧.” 铁匠埋头干活，从一根铁条上弄下四个马掌，把它们砸平、整形，固定在马蹄上，然后开始钉钉子. 钉了三个掌后，他发现没有钉子来钉第四个掌了. “我还缺两个钉子,” 他说，“得需要点时间砸出两个.” “我告诉过你我等不及了,” 马夫急切地说，“我听见军号了，你能不能凑合凑合？” “我能把马掌钉上，但是不像其他几个那样牢固.” “能不能挂住？” 马夫问. “应该能,” 铁匠回答，“但我没把握.” “好吧，就这样,” 马夫叫道，“快点，要不然国王会怪罪到咱俩头上的.”

两军交锋，查理三世冲锋陷阵，鞭策士兵迎战敌人. “冲啊！冲啊!” 他喊着，率领部队冲向敌人. 远远的，他看见战场另一头几个自己的士兵退却了. 如果别人看见他们这样，也会后退的，所以查理三世策马扬鞭冲向那个缺口，召唤士兵掉头战斗. 他还没走到一半，一只马掌掉了，战马跌翻在地，查理三世被摔落在地上. 还没等查理三世抓住缰绳，惊恐的马儿就跳起来逃走了. 查理三世环顾四周，他的士兵们纷纷转身撤退，亨利的军队包围了上来. 他在空中挥舞宝剑，“马!” 他喊道，“一匹马，我的国家倾覆了，就因为这一匹马.” 他没有马骑了，他的军队已经分崩离析，士兵们自顾不暇. 不一会儿，亨利的士兵俘获了查理三世，战役结束了.

点评：查理三世的马夫不按规范要求给战马钉掌，导致在博斯沃思战役中理查三世战马跌翻在地，查理三世被俘虏，国家倾覆. 可以说是一个微不足道的马掌灭亡了一个国家.

——资料来源：李保成 田治平主编《大学生职业发展与就业指导》. 2017.3.

二、撰写：论文

1. 题目：规范意识对个人生涯发展的重要作用

2. 要求：论文中要包含以下内容

（1）本模块中求函数极值的步骤具有一定的规律性与规范性，试通过求函数 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值说明遵循这种规范的益处.

(2) 规范意识是展现个人关键能力的基础，是个人融入社会或企业的桥梁，在日常生活中，如何培养个人的规范意识.

(3) 目前，企业之间竞争激烈，日趋全球化，企业之间的竞争主要是 “规范管理与创新” 的竞争. 列举一个你较熟悉的发展型企业，简要分析企业是如何依靠 “规范管理与创新” 不断推动企业发展的.

3. 论文不少于 2000 字，以小组为单位完成. 各内容要点链接顺畅，合乎逻辑.

【数学技术与应用】

无处不在的数学技术

在第二次世界大战期间（1939—1945 年），许多数学家投入到反对希特勒法西斯的斗争中，一大批直接服务于战争需要的数学技术随之产生.

1940 年，英国和美国海军为了应对德国潜艇的威胁，创立了运筹学，在不增加设备的情况下，依靠数学智力，运筹学可以帮助提高设备能力和使用效率.

1942 年，苏联的科莫格罗夫和美国的维纳分别研究火炮的自动跟踪装置，发展随机过程的预测和滤波理论，提高防空效率．1948 年维纳发表著名的《控制论》.

1939 年起，英国的数学家图灵帮助英国情报部门成功破译德军密码，美军破译日军密码电报，击落日本大将山本五十六的座机.

1944 年，数学家冯 · 诺依曼创立的对策论用于太平洋战争的战术决策.

美国政府组织的“应用数学小组（AMP）”，参与空中火箭发射、水下弹道、B-52H 轰炸机计算等．数学家参与原子弹的研制，波兰裔数学家 S. 乌拉姆为氢弹的研制做出了关键贡献.

数学在反法西斯战争中的应用卓有成效，极大地改造了数学本身，战后和平时期的数学技术，基于计算机的应用在更广阔的范围内展开.

1950 年，冯 · 诺依曼等使用计算机进行数值天气预报，他们使用计算机求解大气环流方程，迅速得出数学解，和经验预报相印证，获得成功.

计算机技术的迅猛发展，使得计算机模拟技术得以实现．设计飞机不必都在风洞中做实验，测试大炮性能不必都采用实弹射击，原子弹等地下核试验可以在计算机上模拟，甚至可以在计算机上进行军事演习.

1979 年，诺贝尔医学奖授予美国的柯马克和英国的洪斯费尔德，褒奖他们运用数学上的拉动原理，设计了 CT 层析仪，人体层析摄影技术造福千千万万的人群，说到底是一种数学技术的实现.

工业管理的自动化，除自动化设备之外，往往还有一项价值上百万的“说明书”，其实就是一个数学模型、一些数据而已.

人们享受数学文明可以说是无处不在．飞机降落定位需要卡尔曼滤波技术，设计汽车需要计算机模拟，医院看病需要数字技术，药品效果有赖统计分析，股票涨落需要数学估算，计算机设计使用二进制数，软件设计依赖离散数学，人工智能的基础是数学方法……

在社会科学方面，人口预测、环境控制、保险精算、交通管理、社会发展模型，都离不开数学的参与.

有人预言，未来的数学研究，只有 10%的工作者以发表论文为目的，90%的工作将是在各行各业用计算机解决．这种估计虽然有些言过其实，但作为一种发展趋势，恐怕不无道理.

数学实验二　Mathematica 在求函数的导数中的应用

实验 1　求 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解　输入：

```
D[Log[Sin[x]],x],.
```

按“ Enter ”键，得：

```
cot[x].
```

实验 2　求 $f(x)=x^2e^x$ 的二阶导数 $f''(x)$.

解　输入：

```
f[x_]=x^2*E^x,
```

按“ Enter ”键，得：

$e^x x^2$.

再输入：

```
D[f[x],{x,2}],
```

按“ Enter ”键，得：

$2e^x+4e^x x+e^x x^2$.

实验 3　求方程 $x^2+y^2-1=0$ 确定的隐函数的导数.

解　输入：

```
D[x^2+y[x]^2-1==0,x],.
```

按“ Enter ”键，得：

```
2x+2y[x]y'[x]==0 .
```

再输入：

```
Solve[2x+2y[x]y'[x]==0,y'[x]],
```

按“ Enter ”键，得：

$$\left\{\left\{y'[x]\to-\frac{x}{y[x]}\right\}\right\}$$

第三模块　微分的逆运算——不定积分

数学在用最不显然的方式证明最显然的事情.

——波利亚（1887—1985 年）

美国著名数学家和数学教育家

【本模块概述】

通过前面内容的学习，我们知道如何求给定函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 和微分 $\mathrm{d}y$，现在来考虑一个相反的问题：如果已知函数的导数 $f'(x)$ 或微分 $\mathrm{d}y$，如何来求函数 $f(x)$ 呢？这就是不定积分问题（导数的逆运算问题）.

本模块要求：理解不定积分的概念、性质，能熟练地应用积分的基本公式和性质解题，掌握积分的直接积分法、换元积分法和分部积分法，了解不定积分在电学、医学、经济领域、交通领域等方面的应用及积分表的使用.

第一节　积分的发展与应用

1．积分的发展

自古以来，面积和体积的计算一直是数学家们感兴趣的问题．在古代希腊、中国和印度数学家们的著述中，不乏用无限小求和来计算特殊形状的面积、体积和曲线长的例子，他们的工作是建立一般积分学的基础．在欧洲，对此类问题的研究兴起于 17 世纪，其中德国的莱布尼茨接受了意大利数学家卡瓦列里（1598—1647）不可分量的原理，将曲边形看成无穷多个宽度为无穷小的矩形之和，从而导致了积分的产生．牛顿从另一途径引出积分的概念，他从确定面积的变化率（导数）入手，通过求变化率的逆过程（反导数）来计算面积，两人都得到了解决计算特殊形状的面积问题的普遍算法——积分计算法，又几乎同时互相独立地得出了积分和微分的互逆关系，由此创立了积分学．但是他们的积分概念缺少逻辑基础，严格的定积分概念是由 19 世纪的柯西和黎曼建立的.

这么看来，积分学是从几何学上的求积（面积和体积）发展起来的．但在牛顿和莱布尼茨时代，考虑到用微分来描述天体运动，建立微分方程，在这个方程求解的过程中，鉴于积分是微分的逆运算，以这一过程为起点，使积分超越了几何学求积的界限，成为非常重要且应用非常广泛的数学概念之一.

积分符号“$\int$ ”是“和”的拉丁语 summa 的首写字母 s 延伸而来，发明这个符号的人是莱布尼茨．但现在使用的积分表示 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 始于费马.

2．关于电量的问题[答案见本模块第六节]

电路中电流关于时间的变化率为：$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=4t-0.6t^2$，若 t=0 时，$i=2\mathrm{A}$，求电流关于时间的函数.

3．城市交通灯下黄灯闪烁时间的设置问题[答案见本模块第六节]

问题提出　交通路口的指挥灯信号有红、黄、绿三种颜色，在绿灯转换成红灯之前有

一个过渡状态，这个过渡状态是由黄灯来完成的，通常是亮一段时间的黄灯后才变成红灯信号，交通指挥灯信号中，为什么要设置黄灯？黄灯信号时间长短应如何确定？

黄灯信号的作用之一是，当机动车驶到设有红绿灯的路口时，提醒驾驶员注意红绿灯信号，当遇到红灯时应立即停车礼让横向的人流和车流通过，但已越过停止线的车辆可以继续行驶；黄灯信号的作用之二是，当黄灯亮时，机动车、行人在保证安全的原则下通行.

停车是需要时间的，在这段时间内，车辆仍将向前行驶一段时间 L，这就是说，在离路口距离为 L 处存在一条停车线（见图 3-1），对于黄灯亮时已经过线的车辆，则应当保证它们仍能穿过马路而不能与横向车流相撞，道路的宽度 D 是已知的，现在的问题是如何确定 L 的大小.

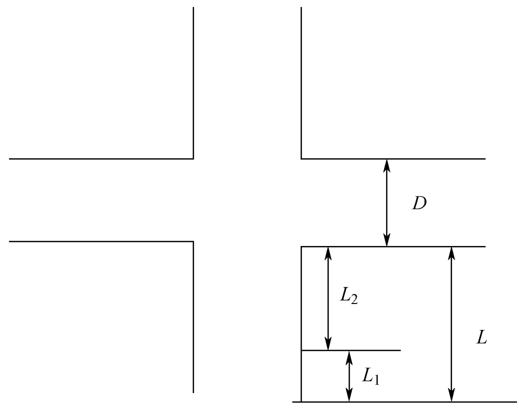


图 3-1

第二节　不定积分的概念与性质

学习内容：不定积分的概念与性质.

目的要求：掌握原函数的概念、原函数族定理及原函数存在定理，熟练掌握不定积分的概念和性质，重点熟练掌握不定积分的基本公式和运算法则.

重点难点：不定积分的概念、性质、基本公式与运算法则.

一、原函数的概念

定义 1　设 $f(x)$ 是定义在某区间 I 上的已知函数，若在该区间上每一点都有 $F'(x)=f(x)$，或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 成立，则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间上的一个**原函数**.

例如 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $f(x)=\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数．显然对任意常数 C，都有 $(\sin x+C)'=\cos x$，因此 $\sin x+C$ 也是 $\cos x$ 的原函数.

求给定函数的原函数是积分学中的基本问题．关于原函数的概念要把握两点：

（1）原函数的个数问题.

（2）原函数的存在问题.

以下两个定理有效地解决了这两个问题.

定理 1　（原函数族定理）若函数 $f(x)$ 存在一个原函数 $F(x)$，则它必有无穷多个原函数，而且任意两个原函数之间只相差一个常数.

所以函数 $f(x)$ 的一切原函数可表示为 $F(x)+C$，C 是任意常数.

那么一个函数满足什么条件，它的原函数一定存在呢？这里只给出结论.

定理 2（原函数存在定理）如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在该区间上 $f(x)$ 的原函数一定存在.

二、不定积分的概念

定义 2　函数 $f(x)$在某区间上的所有原函数，称为 $f(x)$在该区间上的**不定积分**.

记作：$\int f(x)\mathrm{d}x$.

其中符号“$\int$ ”称为**积分号**，$f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**.

由上述两个定义可知，若在某区间上 $F'(x)=f(x)$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，$C$ 是任意常数，称为积分常数.

例 1　求 $\int \cos x\mathrm{d}x$.

解　因为 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

例 2　求 $\int x^2\mathrm{d}x$.

解　因为 $(x^3)'=3x^2$，即 $(\frac{x^3}{3})'=x^2$，所以 $\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C$.

三、不定积分的性质

性质 1　$[\int f(x)\mathrm{d}x]'=f(x)$或$\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=f(x)\mathrm{d}x$.

例如，$[\int \cos x\mathrm{d}x]'=[\sin x+C]'=\cos x$，$\mathrm{d}[\int \cos x\mathrm{d}x]=\mathrm{d}[\sin x+C]dx=\cos x\mathrm{d}x$.

性质 2　$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$或$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$.

例如，$\int \sin' x\mathrm{d}x=\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$，$\int \mathrm{d}\sin x=\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

这两个性质可由定积分的定义直接得到，同时表明，如果不考虑积分常数，微分号“d”与积分号“$\int$ ”不论先后只要连在一起写就可以相互抵消，即：求不定积分与求导或求微分是互逆运算．但要注意：先微分或求导，再积分得到的不是一个函数而是一族函数，要加积分常数.

性质 3　函数的代数和的不定积分等于各个函数的不定积分的代数和，即

$$\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x .$$

注　性质 3 对于有限个函数都是成立的．其证明可由不定积分的定义和导数的运算法则、性质证得.

性质 4　被积函数中不为零的常数因子可以提到积分号外面来，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x .$$

例题 3　（1）$\int (\cos x\mathrm{e}^x)'\mathrm{d}x=\cos x\mathrm{e}^x+C$；　　（2）$\int \mathrm{d}(\frac{\sin x}{x})=\frac{\sin x}{x}+C$；

（3）$(\int \cos x e^x dx)' = \cos x e^x$；　　（4）$d(\int \frac{\sin x}{x} dx) = \frac{\sin x}{x} dx$.

四、不定积分的基本公式

由于积分运算是微分运算的逆运算，因此从导数公式可以得到相应的积分公式.

例如，由于 $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}$，即 $(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1})' = x^{\alpha}$，所以 $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha+1 \neq 0)$.

类似地，可以得到其他基本初等函数的积分公式．下面列出基本积分公式（又叫作基本积分表）：

1. $\int k dx = kx + C$（k 为常数）；

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$（$\alpha$是常数且$\alpha \neq -1$）；

当 $\alpha = -2$，$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$；当 $\alpha = -\frac{1}{2}$，$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$；

3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$；

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad$（$a > 0, a \neq 1$）；

5. $\int e^x dx = e^x + C$；

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$；

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$；

8. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$；

9. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$；

10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$；

11. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$；

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$；

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$.

这 13 个公式是求积分的基础，必须熟记．下面举例说明基本积分表的应用.

例 4　求 $\int \frac{1}{x^4} dx$.

解　$\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx$

$$= \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} + C = -\frac{1}{3} x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C - \frac{1}{3x^3} + C.$$

例 5　求 $\int x\sqrt{x} dx$.

解　$\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C.$$

例 6　求 $\int 3^x dx$.

解　$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$

例 7　求 $\int(\mathrm{e}^x-5\cos x)\mathrm{d}x$.

解　$\int(\mathrm{e}^x-5\cos x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-5\int\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-5\sin x+C$

习题 3-2

1．填空题

（1）若 $f(x)$ 是 $\sin x$ 的一个原函数，则 $f(x)$ =_____.

（2）设 $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin 3x+x^5+C$ ，则 $f(x)=$_____.

（3）若 $\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$___，$\int f'(x)\mathrm{d}x=$___，$\mathrm{d}(\int f(x)\mathrm{d}x)=$___.

2．求下列不定积分

（1）$\int x^3\mathrm{d}x$　　（2）$\int\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

（3）$\int\sqrt{x}\mathrm{d}x$　　（4）$\int x\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$

（5）$\int(\frac{2}{x}+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$　　（6）$\int(3^x-\cos x)\mathrm{d}x$

（7）$\int(x^2-x+1)\mathrm{d}x$　　（8）$\int(2\sin x+3-x^2)\mathrm{d}x$

第三节　直接积分法

学习内容：直接积分法.

目的要求：熟练掌握不定积分的基本公式，理解直接积分法并能熟练应用直接积分法求不定积分.

重点难点：不定积分的基本公式，直接积分法的应用.

利用不定积分的基本公式和不定积分的性质，经过适当变形，求出不定积分的方法，称为**直接积分法**.

例 1　求 $\int\left(2\mathrm{e}^x+\sin x-\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$.

解　利用基本积分公式和不定积分积分的性质得

$$\begin{aligned}\int\left(2\mathrm{e}^x+\sin x-\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x&=2\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x-7\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=2\mathrm{e}^x-\cos x-7\arcsin x+C\ .\end{aligned}$$

例 2　求 $\int x(x-2)\mathrm{d}x$.

解　$\int x(x-2)\mathrm{d}x=\int(x^2-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x^2+C$.

例 3　求 $\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 $\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln 2e} + C = \frac{(2e)^x}{\ln 2 + 1} + C$.

例 4 求 $\int \frac{5x^2+2x-1}{x^2} dx$.

解 先对被积函数化简，再求积分．于是有

$$\int \frac{5x^2+2x-1}{x^2} dx = \int \left(5 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= 5\int dx + 2\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = 5x + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

例 5 $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx$.

解 $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x} dx = \int (x+2+\frac{1}{x}) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C$.

例 6 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

解 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx$

$$= \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \arctan x + C.$$

例 7 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$.

解 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)+x}{x(1+x^2)} dx$

$$= \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}) dx = \ln|x| + \arctan x + C.$$

例 8 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

解 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$.

例 9 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$.

解 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} dx$

$$= \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + C.$$

★ **例题 10** $\int \frac{x^3+3x^2-4}{x+2} dx$.

解 方法 1 $\int \frac{x^3+3x^2-4}{x+2} dx = \int \frac{(x^3+2x^2)+(x^2-4)}{x+2} dx$

$$= \int \left[\frac{x^2(x+2)}{x+2} + \frac{x^2-4}{x+2}\right] dx = \int \left(x^2+x-2\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C.$$

方法 2 $\int\frac{x^3+3x^2-4}{x+2}dx=\int\frac{(x^3+8)+3(x^2-4)}{x+2}dx$

$$=\int\left[\frac{x^3+8}{x+2}+\frac{3(x^2-4)}{x+2}\right]dx=\int\left[x^2-2x+4+3(x-2)\right]dx$$

$$=\int(x^2+x-2)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+C.$$

【归纳】

检验求不定积分的结果是否正确，可以利用求导和求不定积分的互逆关系进行：把求不定积分得到的结果再求导数，看是否等于被积函数即可.

习题 3-3

求下列不定积分

（1）$\int\left(\cos x-\frac{3}{x}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$；

（2）$\int x(2x+1)dx$；

（3）$\int 7^x e^{3x}dx$；

（4）$\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$；

（5）$\int\frac{(x-2)^2}{x^2}dx$；

（6）$\int\frac{(x+1)^3}{x}dx$；

（7）$\int\frac{x^2-1}{x+1}dx$；

（8）$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$；

（9）$\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$；

（10）$\int\frac{x^2-3}{1+x^2}dx$；

（11）$\int\frac{3+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$；

（12）$\int\frac{1-2x+x^2}{x(1+x^2)}dx$；

（13）$\int 2\cos^2\frac{x}{2}dx$；

（14）$\int\frac{3\cos 2x}{\sin x-\cos x}dx$；

（15）$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$；

（16）$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$；

（17）$\int\cot^2 x dx$；

（18）$\int\tan^2 x dx$；

（19）$\int\frac{x^2-x-6}{x+2}dx$；

（20）$\int\frac{x^3+5x^2-13}{x+2}dx$.

第四节 第一类换元积分法（凑微分法）

学习内容：换元积分法.

目的要求：通过学习，使同学们熟练掌握不定积分的换元积分法的公式，熟练运用换元积分法来求各种类型的不定积分.

重点难点：不定积分的换元积分公式，应用换元积分公式求解各种不定积分.

能用直接积分法计算的不定积分是十分有限的，复合函数就不能用直接积分法计算.注意到复合函数求导得到的仍然是复合函数，可考虑将复合函数的求导法则反过来用于不定积分，通过适当的变量替换（换元），就可以计算出所求不定积分.

第一类换元积分法

设函数 $u=\varphi(x)$ 可导，若 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$ ，则把所求积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 凑成如下形式：

$$\int g(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{凑成}} \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)=F(\varphi(x))+C .$$

可以看出，**第一类换元积分法的实质正是复合函数求导公式的逆用**．也就是将积分公式中的积分变量 x 换成 $\varphi(x)$ ，结果仍然成立.

引例 求 $\int \cos 2x\mathrm{d}x$.

解 被积函数 $\cos 2x$ 是 $2x$ 整体的余弦函数，而 $\mathrm{d}(2x)=2\mathrm{d}x$ ，所以 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x)$ ，则

$$\int \cos 2x\mathrm{d}x=\int \cos(2x)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int \cos(2x)\mathrm{d}(2x)\overset{u=2x}{=}\frac{1}{2}\int \cos u\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\sin u+C\overset{u=2x}{=}\frac{1}{2}\sin(2x)+C .$$

以上例题解题方法都是换元法，从中可以看到，其解题精髓是找到整体 $u=\varphi(x)$ ，凑出整体的微分 $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ ，将被积函数 $g(x)$ 转化 $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ ，然后凑成基本积分公式的形式．当熟练后，对不复杂的题目就不必设中间变量 u ，把 u 记在心里.

【归纳】

要掌握第一类换元法，首先要熟悉求导公式和积分基本公式，以便顺利找出凑微分的方式，换元积分法的技巧就在于“拆得巧”“拼得巧”“凑得巧”．凑微分是有一些规律的，熟记一些常见的凑微分形式，再经过一定的解题训练就可以掌握解题技巧.

常用的凑微分形式

（1） $\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)(a,b\text{为常数，且}a\neq 0)$ （2） $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$

（3） $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln|x|=\frac{1}{a}\mathrm{d}(a\ln|x|+b)$ $(a,b\text{为常数，且}a\neq 0)$

（4） $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x}$ （5） $\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\frac{1}{x})$

（6） $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$ （7） $a^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}(a^x)}{\ln a}$ $(a>0\text{且}a\neq 1)$

（8） $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$ （9） $\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$

（10）$\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$　　（11）$\csc^2 x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$

（12）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\arcsin x)$　　（13）$\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\arctan x)$

例题 1　求 $\int \sin(3x+1)\mathrm{d}x$.

解　把 $(3x+1)$ 看作整体，它的微分是 $\mathrm{d}(3x+1)=3\mathrm{d}x$，则由 $\mathrm{d}x$ 可以凑微分 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(3x+1)$，则

$$\int \sin(3x+1)\mathrm{d}x = \int \sin(3x+1)\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}(3x+1) = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\mathrm{d}(3x+1)$$
$$\overset{u=3x+1}{=} \frac{1}{3}\int \sin u\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\cos u + C \overset{u=3x+1}{=} -\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C .$$

例题 2　求 $\int \mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}x$.

解　把 $(2x-1)$ 看作整体，它的微分是 $\mathrm{d}(2x-1)=2\mathrm{d}x$，则由 $\mathrm{d}x$ 可以凑微分 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(2x-1)$，则

$$\int \mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x-1}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x-1) = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}(2x-1)$$
$$\overset{u=2x-1}{=} \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{u}+C \overset{u=2x-1}{=} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C .$$

例题 3　求 $\int \dfrac{1}{2x+7}\mathrm{d}x$.

解　把 $(2x+7)$ 看作整体，它的微分是 $\mathrm{d}(2x+7)=2\mathrm{d}x$，则由 $\mathrm{d}x$ 可以凑微分 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(2x+7)$，则

$$\int \frac{1}{2x+7}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2x+7}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x+7) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+7}\mathrm{d}(2x+7)$$
$$\overset{u=2x+7}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u|+C = \overset{u=2x+7}{=} \frac{1}{2}\ln|2x+7|+C .$$

例题 4　求 $\int (3x-5)^7\mathrm{d}x$.

解　把 $(3x-5)$ 看作整体，它的微分是 $\mathrm{d}(3x-5)=3\mathrm{d}x$，则由 $\mathrm{d}x$ 可以凑微分 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(3x-5)$，则

$$\int (3x-5)^7\mathrm{d}x = \int (3x-5)^7\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}(3x-5) = \frac{1}{3}\int (3x-5)^7\mathrm{d}(3x-5)$$
$$\overset{u=3x-5}{=} \frac{1}{3}\int u^7\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\times\frac{1}{8}u^8+C = \overset{u=3x-5}{=} \frac{1}{24}(3x-5)^8+C .$$

例题 5　求 $\int \dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

解　被积函数中 $\dfrac{1}{x}$ 是 $\ln x$ 的导数，即 $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$，则

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}(\ln x) \overset{u=\ln x}{=} \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2+C \overset{u=\ln x}{=} \frac{1}{2}\ln^2 x+C .$$

例题 6 求$\int \tan x\mathrm{d}x$.

解 由于$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$

所以
$$\int \tan x\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

类似可得
$$\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C.$$

例题 7 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解 被积函数中的e^{x^2}可以视为x^2的函数，且$(x^2)'=2x$，即$2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}x^2$，则
$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{x^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{e}^u+C=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C.$$

例题 8 求$\int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x$.

解 被积函数中$\cos x$是$\sin x$的导数，即$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$，则
$$\int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x=\int \sin^3 x\mathrm{d}\sin x\overset{u=\sin x}{=}\int u^3\mathrm{d}u=\frac{u^4}{4}+C\overset{u=\sin x}{=}\frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

例题 9 求$\int \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解 由题意可以看到 $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)$，

所以 $\int \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\cdot \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$.（把$1+\mathrm{e}^x$看作$u$）

例题 10 求$\int \dfrac{2x-1}{x^2-x+3}\mathrm{d}x$.

解 由于$(2x-1)\mathrm{d}x=(x^2-x+3)'\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x^2-x+3)$

所以
$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+3}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(x^2-x+3)}{x^2-x+3}=\ln|x^2-x+3|+C.$$

注意：求不定积分还有第二类换元积分法，比较复杂，本书不做讲解，有兴趣的同学请参阅同济大学编写的《高等数学》(第六版).

习题 3-4

1．填空题

（1）$\mathrm{d}x=$（　　）$\mathrm{d}(1-\dfrac{x}{a})$；

（2）$\sin 2x\mathrm{d}x=$（　　）$\mathrm{d}(\cos 2x)$；

（3）$x\mathrm{d}x=\mathrm{d}$（　　）；

（4）$x\mathrm{d}x=$（　　）$\mathrm{d}(1-x^2)$；

（5）$\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=$（　　）$\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$；

（6）$\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=$（　　）$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax}+5)$.

2．求下列不定积分

（1）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-2x}$；

（2）$\int (3x-1)^3\mathrm{d}x$；

（3）$\int e^{-5x}dx$；　　（4）$\int \frac{1}{(2x-1)^2}dx$；

（5）$\int (4x+1)^3 dx$；　　（6）$\int \sin x\cos x dx$；

（7）$\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$；　　（8）$\int xe^{-x^2}dx$；

（9）$\int \frac{dx}{1+9x^2}$；　　（10）$\int \frac{xdx}{1+9x^2}$；

（11）$\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　　（12）$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$；

（13）$\int e^{\sin x}\cos x dx$；　　（14）$\int \sin^5 x dx$；

（15）$\int \sin^2 x\cos^3 x dx$；　　（16）$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$；

（17）$\int \sin^2 x dx$；　　（18）$\int \cos^3 x dx$；

（19）$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx\ (a \neq 0)$；　　（20）$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

第五节　分部积分法

学习内容：分部积分法、积分表的使用.

目的要求：通过学习，使同学们熟练掌握不定积分的分部积分公式，熟练运用分部积分法来求各种类型的不定积分，学会查积分表求不定积分.

重点难点：不定积分的分部积分公式，应用分部积分公式求各种不定积分.

虽然换元积分法能解决许多积分的计算，但对于被积函数是两个函数的积的形式，形如$\int e^x\cos x dx$、$\int x\ln x dx$、$\int x\cos x dx$等积分就难于求出，本节将介绍另一种求积分的主要方法——分部积分法来解决此类问题.

一、分部积分法

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$具有连续的导数，由乘积的求导法则

$$(uv)'=u'v+uv' \quad 可得 \quad uv'=(uv)'-u'v \tag{1}$$

把（1）两端积分

$$\int uv'dx=\int (uv)'dx-\int u'vdx$$

$$\int udv=uv-\int vdu \tag{2}$$

这个公式表明所求两个函数之积的积分可以转化为$\int udv$的积分.

公式（2）称为不定积分的分部积分法公式.

利用分部积分法主要是把所求积分中的被积表达式适当地分成u和dv两部分，所以这种积分法的关键是在正确选择u、dv，一般u、dv的选取原则是：

（1）由 $\mathrm{d}v$ 易求 v；　　（2）$\int v\mathrm{d}u$ 比 $\int u\mathrm{d}v$ 易求.

对于被积函数是反三角函数乘以幂函数、对数函数乘以幂函数、幂函数乘以三角函数、幂函数乘以指数函数这些类型的不定积分，都可以使用分部积分法.

例题 1　求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.（幂函数乘以三角函数）

解　设 $u=x$，$\mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$，则 $v=\sin x$.

由分部积分法公式 $\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\sin x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$.

熟练后 u、v 就不必假设出来，只要默默记在心里即可.

例题 2　求 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.（幂函数乘以指数函数）

解　设 $u=x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$，则 $v=\mathrm{e}^x$.

由分部积分法公式 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

例题 3　求 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x&=\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x^2=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=x^2\mathrm{e}^x-2(x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x)=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+C.\end{aligned}$$

例题 4　求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int x\ln x\mathrm{d}x&=\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\ln x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.\end{aligned}$$

例题 5　求 $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\mathrm{d}x&=x\arcsin x-\int x\mathrm{d}(\arcsin x)=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=x\arcsin x+\int\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.\end{aligned}$$

例题 6　求 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解　因为

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x&=\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(-\cos x)=-\mathrm{e}^x\cos x+\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^x\cos x+\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\sin x=-\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x\sin x-\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C.$$

【归纳总结】

利用分部积分公式时，如果 u、v 选择不当，可能使所求积分更加复杂，选择 u、v 的一般顺序是，按照“反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数（简称：反对幂三指）”的顺序，将顺序在前的作为 u，将顺序在后的凑成 $\mathrm{d}v$.

二、积分表的使用

从前面几节我们可以看出积分的计算比微分的计算复杂，灵活性较强．被积函数形式

稍有不同，相应的积分方法和结果就有很大的差别．为了便于应用，人们将常用的不定积分按被积函数的类型编辑了公式表以供查用，本书附录 C 中给出了一个不定积分表，求不定积分时，可根据被积函数的类型直接或经过简单变形后，在积分表中查到积分的结果．

下面通过例子说明积分表的用法．

例题 7　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+7x^2}$．

解　被积函数中含有 ax^2+b，在附录III含有此形式的积分类中查表找到公式，将 $a=7$，$b=3$ 代入公式得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+7x^2} = \frac{1}{\sqrt{21}}\arctan\sqrt{\frac{7}{3}}x + c .$$

例题 8　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-9x^2}}$．

解　这个积分不能直接在积分表中找到，需要先进行变换．

设　$u=3x$ 则 $x=\frac{u}{3}, \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}u$，于是原式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{2^2-u^2}} .$$

查找附录 C 公式表中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 的积分公式，把 $a=2$ 代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{2^2-u^2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{4-9x^2}}{|3x|} + C .$$

例题 9　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x}$．

解　查找附录 C 公式表中含有三角函数的积分公式，把 $a=2, b=3$ 代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x} = \frac{1}{6}\arctan(\frac{3}{2}\tan x) + C .$$

习题 3-5

1．求下列不定积分

（1）$\int x\sin x\mathrm{d}x$；　　（2）$\int x^2\cos x\mathrm{d}x$；

（3）$\int x\cos 2x\mathrm{d}x$；　　（4）$\int x\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；

（5）$\int (x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　（6）$\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

（7）$\int x^4\ln x\mathrm{d}x$；　　（8）$\int \ln x\mathrm{d}x$；

（9）$\int \arctan x\mathrm{d}x$；　　（10）$\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$．

2．利用积分表求下列积分

（1）$\int \sqrt{3x^2-2}\mathrm{d}x$　　（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(2+3x)^2}$

第六节　应用实训

不定积分是求导的逆运算，它已被人们广泛应用于电学、城市交通、经济学、医学等领域.

例题 1　电流函数（见第一节引例 1）

解　因为 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=4t-0.6t^2$，所以 $i=\int(4t-0.6t^2)\mathrm{d}t=2t^2-0.2t^3+c$，

而 t=0 时，i=2，于是 c=2.

所以　$i=2t^2-0.2t^3+2$

例题 2　城市交通流下黄灯闪烁时间的设置问题（见第一节引例 2）

问题解决：

L 应当划分为两段：L_1 和 L_2，其中 L_1 是驾驶员发现黄灯亮时刻起到他判断应当刹车的反应时间内机动车行驶的距离，L_2 为机动车制动后到停下来车辆行驶的距离，即刹车距离．L_1 是容易计算的，因为交通部门对驾驶员的平均反应时间 t_1 早有测算，而在城市不同路况的道路上对车辆行驶速度 v_0 已有明确规定，就是选择适当的行驶速度 v_0 使交通流量达到最大，于是 $L_1=v_0t_1$.

刹车距离 L_2 可通过下述方法求得，假设汽车在城市路面上以速度 v_0 匀速行驶，到某处需要减速停车，汽车以等加速度 $a=-a_0$ 刹车，设开始刹车的时刻为 $t=0$，刹车后减速行驶，其速度函数 $v(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t}=-a_0\text{，即 }\mathrm{d}v=-a_0\mathrm{d}t$$

由初始条件 $v(0)=v_0$，求得速度函数为

$$v(t)=v_0-a_0t$$

当汽车运动停住时，$v(t)=0$，从而得 $t=\frac{v_0}{a_0}$．于是从刹车时刻到汽车停下来，汽车行驶的距离为

$$L_2=\int_0^{t_0}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{t_0}(v_0-a_0t)\mathrm{d}t=\frac{{v_0}^2}{2a_0}$$

通过上面的推导知，黄灯闪烁时间包括从驾驶员看到黄灯开始到汽车停下来所行驶的距离为 $L=v_0t_1+\frac{{v_0}^2}{2a_0}$ 所用的时间和让已经过线的车辆顺利穿过路口所用的时间.因此，黄灯闪烁的时间至少应为

$$T=\frac{D+L}{v_0}$$

例题 3 [伤口恢复问题]

经研究发现，某一个小伤口表面回复的速度为 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=-5t^2\ (1\leqslant t\leqslant 5)$（$t$ 的单位：天），其中 A 表示伤口面积（单位：cm^2）．假设 $A(1)=5$，问受伤 5 天后该病人的伤口表面积

为多少？

解：由

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=-5t^2$$

得

$$A=\int -5t^{-2}\mathrm{d}t=5t^{-1}+c \quad (c\text{为常数})$$

将

$$A(1)=5$$

代入上式得

$$c=0$$

所以受伤 5 天后该病人的伤口表面积

$$A(5)=1\,(\mathrm{cm}^2)$$

例题 4 [药品销售问题]

某药品的成本是

$$Mc=20+\mathrm{e}^{-x}\sin\pi x$$

其中 x 是药品件数，试求该药品的成本函数？

解　设该药品的边际成本函数为 $c(x)$，由于

$$c'(x)=Mc=20+\mathrm{e}^{-x}\sin\pi x$$

$$c(x)=\int(20+\mathrm{e}^{-x}\sin\pi x)\mathrm{d}x=20x+\int\mathrm{e}^{-x}\sin\pi x\mathrm{d}x$$

所以

$$=20x-\int\sin\pi x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=20x+\frac{(\sin\pi x+\cos\pi x)\mathrm{e}^{-x}}{1+\pi^2}+c$$

例题 5 [药物溶解问题] 物体的冷却速度正比于温度与环境温度之差，用开水冲泡抗病毒冲剂，3min 后抗病毒冲剂的温度是 85℃，若房间温度是 20℃，几分钟后抗病毒冲剂的温度为 60℃？

解　设　$T(t)$ 表示冲剂在时刻 t 的温度，则

$$T(0)=100^\circ\mathrm{C} \qquad T(3)=85^\circ\mathrm{C}$$

由冷却定律得

$$\frac{\mathrm{d}(T-20)}{T-20}=-kt \text{（其中 } k \text{ 为比例常数）}$$

两边求不定积分得

$$\ln(T-20)=-kt+c_1$$

所以

$$T-20=c_2\mathrm{e}^{-kt} \quad \text{即} \quad T=c_2\mathrm{e}^{-kt}+20$$

将 $T(0)=100℃$ 代入上式得 $c_2=80$，于是

$$T=80\mathrm{e}^{-kt}+20$$

由 $T(3)=80\mathrm{e}^{-3kt}+20=85$

得 $k=0.069$，再由 $T=60^\circ\mathrm{C}$，得 $t=10.05$．故 10 分钟后抗病毒冲剂的温度是 $60^\circ\mathrm{C}$．

第七节　释疑问答

问题 1　如何正确理解原函数的概念？

对于定义在区间 I 上的函数 $f(x)$，如果存在函数 $F(x)$，使得在该区间上的任何一点 x 处都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是区间 I 上 $f(x)$ 的原函数.

从上述定义可知，判断函数 $F(x)$ 是否为 $f(x)$ 的原函数，必须明确定义的区间及在该区间上 $F(x)$ 的导数等于 $f(x)$．这个给定的区间可以是有限的，也可以是无穷的．例如，在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $\frac{1}{4}x^4$ 是 x^3 的原函数，但不能说 $x^{\frac{1}{3}}$ 是 $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 的原函数，这是因为 $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 在点 $x=0$ 处没有定义，当然它不是 $x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处的导数，我们只能说在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上 $x^{\frac{1}{3}}$ 是 $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 的原函数.

但是，通常我们说 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数时，往往并不指出对应的区间，这时应理解为在 $F(x)$ 与 $f(x)$ 的定义域的公共部分的某一区间上，$F(x)$ 才是 $f(x)$ 的原函数．例如：

$\arccos x$ 是 $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的原函数，就是指 $\arccos x$ 的定义域 $[-1,1]$ 和 $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域 $(-1,1)$ 的公共部分，即在区间 $(-1,1)$ 内 $\arccos x$ 是 $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的原函数.

类似的，在理解不定积分的概念时所谓 $F(x)+c$ 是 $f(x)$ 的不定积分，实际上也是在约定的某个区间上，但是通常并不指明这个区间，这时我们约定 $F(x)$ 与 $f(x)$ 的定义域的公共部分中的某个区间.

问题 2　由求导公式知 $(\ln x)'=\frac{1}{x}\quad(x>0)$，而基本积分表中 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+c$，请解释其中的理由？

在基本导数公式中，$(\ln x)'=\frac{1}{x}\quad(x>0)$，即只有在 $(0,+\infty)$ 成立，而现在求不定积分时 $\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因此应理解为在以上两个区间内分别求其原函数：

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln x+c_1 & (x>0)\\ \ln(-x)+c_2 & (x<0)\end{cases}$$

为方便起见，把上式合并为 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+c$，这个等式既适合 $(0,+\infty)$，也适合 $(-\infty,0)$．

问题 3　一切初等函数都有原函数吗？

由原函数的存在定理知：如果 $f(x)$ 在某区间上连续，那么在这个区间上，它的原函数一定存在，由于一切初等函数在它的定义区间上都是连续的，所以一切初等函数在其每个定义区间上都有原函数．但是不能说一切初等函数在其定义域内都有原函数，因为并不是所有的初等函数的定义域都包含有区间．例如，初等函数 $\sqrt{\cos x-1}$ 仅在孤立的点 $x=2k\pi$ 处有定义，因而 $\sqrt{\cos x-1}$ 就没有原函数.

问题 4　偶函数的原函数是否必为奇函数？奇函数的原函数是否必为偶函数？

前一种说法不对，后一种说法正确，例如 $f(x)=1$，定义域 $(-\infty,+\infty)$ 是偶函数．但它的一个原函数 $F(x)=x+1$ 并不是奇函数．

设 $f(x)$ 为任意奇函数，有 $f(-x)=-f(x)$，设其原函数为 $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$，因为 $F(-x)=\int f(-x)\mathrm{d}(-x)=\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)$，所以 $F(x)$ 为偶函数，即任一奇函数的原函数为偶函数．

问题 5　不定积分的结果形式唯一吗?如何检验其结果的正确?

不唯一．函数的导数结果一般可以化为唯一的形式，但是不定积分的结果可以有多种形式，有时很难将其化为唯一的一种形式．因为计算不定积分时，正确的答案不追求形式上的唯一，但不同的原函数之间仅相差一个常数，例如：

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\\
&=\arccos\frac{1}{x}+c \quad (令x=\sec t,用换元法可得)\\
&=\arctan\sqrt{x^2-1}+c \quad (令\sqrt{x^2-1}=t,用换元法可得)\\
&=-\arcsin\frac{1}{x}+c \quad (=-\int\frac{1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}\frac{1}{x})
\end{aligned}
$$

容易得出三个不同的原函数两两之间仅差一个常数，但函数在不同的区间上的原函数之间未必相差一个常数，例如

$$
\int|x|\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+c, & (x\geqslant 0)\\[2ex] -\dfrac{1}{2}x^2+c, & (x<0)\end{cases}
$$

在区间 I 上的函数 $f(x)$ 可积，则有 $(\int f(x)\mathrm{d}x)'=f(x)$，由此检验一函数积分结果正确与否，可通过对其求导，若导数与被积函数相等，且结果中又含有任意常数，则积分结果是正确的．

问题 6　初等函数的不定积分都可以用初等函数表示吗？

不一定，尽管初等函数在它的定义区间上一定具有原函数，但是原函数不一定是初等函数，例如，在历史上，切比雪夫等人已经证明：e^{-x^2}，$\sin x^2$，$\dfrac{\sin x}{x}$，$\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，$\dfrac{1}{\ln x}$ 等函数的原函数都不是初等函数．

问题 7　微分运算与不定积分运算是互逆的，这种说法对吗？

对，由不定积分的定义可知：若 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 $[\int f(x)\mathrm{d}x]'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=f(x)\mathrm{d}x$，又若 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，则

$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$，记号 $\int$ 与 d 连在一起时，或者抵消，或者抵消后相差一个常数，因此在可相差一个常数的前提下，微分运算与不定积分运算互为逆运算．

第八节 拓展实训

一、阅读材料

山无常势，水无常形，事事无常. 因此，我们的思想与行动必须根据事物的变化而变化. 事物需要你“这样”变时，你应能做出“这样”的反应；事物要你“那样”变时，你也应做出“那样”的抉择. 这就是变通.

变通是创造性思维的要素之一，它反映了创造性思维过程中转换和灵活应变的特征.

变通思维有多种形式和内容，从思维方向上分，有顺势变通、逆势变通和迂回变通 3 种，从思维信息来源和范围上分，有借势和造势之别.

在解决问题的过程中，充分利用已有的全部信息和条件，人的思维沿着事物发展的方向进行发散，从而寻求解决问题的办法，这就叫顺势变通. 顺势变通有 2 个基本特征:一是方向性. 顺势变通与逆势变通在方向上是相反的，也就是说，逆势变通改变了事物原本运行的方向，顺势变通并不改变事物原本运行的方向，而是建立在顺向思维的基础上，充分利用原有的惯势进行创新. 二是纵横联动性，一方面朝纵深方向探究客观现象的原因，做出突破性发现，另一方面进行横向检索，把相似、相关的事物加以联系，扩散思路，以求思维的流畅性、求异性和独特性. 这种联动性，能使思维的触角像发射的电波一样，朝前辐射，为解决新问题，创造新事物开辟新道路.

顺势变通和顺向思维在方向上虽然是一致的，但本质却是大相径庭. 顺向思维是定势思维，或称习惯思维，它对解决常规性的问题、进行常规性的思考较为有利，而一旦遇到其他问题，也首先用顺向思维来进行思考. 有位心理学家说:“只会用锤子的，总是把一切问题看作钉子，”用一种固定的思维模式来思考繁复杂沓问题，后果可想而知. 因此，顺向思维不利于创新思考. 顺势变通讲“变通”，是创造性思维的组成部分. 顺势变通往往源于顺向思维，却升华于变通之中.

例如: 20 世纪中期，美国和前苏联都具备了将火箭送上太空的科学技术条件. 当时的美国在这方面的实力比前苏联更加强大，但双方都面对着一个比较严重的实际问题，这就是火箭的推动力不够强大，摆脱不了地心的引力. 如何解决这个问题，成了前苏联与美国专家很头痛的事情. 他们根据各自以往的经验，只是在设法增加火箭的分级数量上入手，以求不断增加推动力，可是尽管火箭的分级数量增加了不少，但最终还是解决不了问题. 后来，前苏联的一位年轻科学家摆脱了不断增加火箭级数的思路，产生一个新的设想——只串联起上面的两级火箭，把下面的火箭改成用 20 个发动机串联在一起的方法，经过严密计算和试验，这个方法终于获得成功. 于是，一个长期使许多科学家束手无策的技术难题，由于这样一个简单的新设想，很快得到了解决. 所以前苏联能够在美国之前，于 1957 年首先将人造卫星送上太空. 这个例子很能说明顺向思维与顺势变通的区别和联系，不断增加火箭的分级数量与串联发动机都是为了增大火箭的推动力，思维方向是一致的，只是前者仅仅沿用传统的方法，后者却是一种变通.

二、撰写：研究报告

（一）题目：现代机械设计制造变通思维的重要性

（二）说明

1．换元积分法的技巧就在于“拆得巧”、“拼得巧”、“凑得巧”，整个过程 $\int g(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{凑成}} \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$ 的核心就是“变通思维”.

2．人类创新离不开人类的创造力，创造力直接来源于人类创造性的思维，设计是运用思维的结果，它反映了进行分析、推理、综合与抽象等具有创造性心理活动的过程．目前，世界各国都在一定程度上加强本国对知识产权的保护力度，而传统引进、消化、吸收再创新的模式已经不能适应我们国家机械设计制造行业的发展要求．能够增强自主的创新能力，应当是我国机械行业发展最为合理与正确的途径．所以我们必须将创新型思维运用到现代机械设计与制造当中，不断提高自身的创新意识与能力，设计和制造出成本更低、精度更高、操作性更好、自动化程度更高与更加节能环保的现代机械产品.

（三）研究报告中要包含以下内容

1．求不定积分 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，分析整个过程中的顺向思维与顺势变通.

2．从创新现代机械设计的设计思想及科学地进行机械设计制造两个方面论述．如创新现代机械设计的设计思想：运用发散思维（属变通思维），是以解决问题为中心，打破常规，从不同方向，多角度、多层次，多个出发点来考虑相同的问题，且能得出多种答案的思维方式．如将提出“将两零部件连接在一起”的问题，常规办法可以通过螺纹连接、焊接、胶接、铆接等手段解决，但是运用发散思维的思考方式，也可以利用电磁力、摩擦力、压差或真空、绑缚、冷冻等方法．发散思维是创造性思维的主要形式之一，在技术创新和方案设计中具有重要的地位.

3．以上内容要衔接顺畅，合乎逻辑；本研究报告不少于 3000 字；以小组为单位完成.

【数学科学与技术】

化无形为可见

当你应用数学来研究某些现象时，数学能带给你什么？这一问题的答案是：数学可以让不可见变为可见．举例说明.

要是没有数学，你将无从理解，是什么东西让一架巨型喷气式飞机浮在空气中．我们都知道，大型金属物如果没有东西支撑，根本无法停留在空中．但是，当你注视一架喷气式客机飞过你的头顶时，你看不到任何支撑物．是数学让我们“看到”令飞机漂浮高处的是什么．让你“看到”那些不可见的支撑物，是一个在 18 世纪早期被数学家丹尼尔·伯努利发现的方程式.

当我们正在讨论飞行主题时，是什么原因促使飞行器以外的物体一被我们松开便坠地？你回答：“是重力”．然而这无助于我们理解它．它仍然是不可见的．我们也可以称它是一种“魔术”．为了理解重力，你必须“看到”它．那正是牛顿在 17 世纪利用他的运动和力学方程式所做的事．牛顿的数学理论帮助我们“看到”地球绕着太阳旋转，以及苹果从树上坠地的不可见之力.

伯努利方程式与牛顿方程式这两者都使用了微积分．微积分之所以行得通，乃是因为它让无穷小量变为可见.

究竟是什么使得北京奥运会的图像和声音，奇迹般地同步出现在与比赛场地相差千里

的家庭中的电视屏幕上？你的回答是："无线电波传递过来的"．不过，就像重力的例子一样，你的答案只是给这个现象一个名字，它并不能帮助我们"看到"它．为了"看到"无线电波，你必须用数学．19世纪所发现的麦克斯韦方程组（Maxwell's equations），让那些可见的无线电波，变得可以让我们见到．

使用数学，我们可以展望未来：

- 概率论与数理统计学让我们预测选举结果，且往往有着出色的准确率．
- 我们使用微积分预测明日的天气．
- 市场分析师使用各种数学理论预测股票市场的变化．
- 保险公司使用统计学与概率论去预测来年一些事故发生的可能性，从而据以推出他们的保险产品．

当时代引领我们展望未来时，数学允许我们将另外一些不可见——亦即尚未发生之事——变为可见．当然我们的视界并不完美，我们的预测失准在所难免，不过，要是没有数学，我们的展望未来将是一个神话．

数学实验三　Mathematic在不定积分中的应用

【实验目的】

1．学习求不定积分的命令Integrate．

2．了解Mathematica软件在积分运算的重要作用．

【基本语句】

1．Integrate[被积函数，自变量]

功能　计算被积函数的一个原函数．

2．Module[{j，tu}，…]；

功能　定义新的模块，便于计算积分和作图．

【实验内容】

计算以下函数的不定积分．

（1）$y = x\sin x$

Mathematica语句

```
 Clear[x];
Integrate [x*Sin[x], x]
```

运行结果

```
-xcos[x]+sin[x]
```

（2）$y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Mathematica语句

```
 Clear[x];
Integrate [Sqrt[a^2-x^2],x]
```

运行结果

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arctan\left[\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]\right)$$

第四模块　求总量或变化量的问题——定积分及其应用

学习数学要多做习题，边做边思索．先知其然，然后知其所以然．

——苏步青

【本模块概述】

不定积分是微分的逆运算，而定积分是和式的极限．定积分的概念是数学、物理、工程、技术、经济、金融等有关问题高度抽象的结果．定积分能精确求解“非均匀分布的总量”这一类问题．已广泛应用于自然科学、社会科学、技术科学等众多领域．17世纪中叶，牛顿和莱布尼茨先后提出了积分的概念——和式极限，后又发现了积分和微分之间的内在联系，提供了计算定积分的一般方法，自此，定积分成为解决实际问题的有力工具，而原本独立的微分学和积分学则紧密地联系在了一起，构成理论体系完整的微积分学．在学习中要达到如下要求：理解定积分的概念；掌握定积分的性质；掌握牛顿-莱布尼茨公式及直接积分法、定积分的换元法、分部积分法，学会使用定积分计算几何问题及解决，如企业管理、物理、金融等领域的实际问题．

引例1　交流电整流问题[答案见第五节]

有一单相全波整流电路，如图4-1所示，交流电源电压经整流后，供给负载 R 直流电压，如变压器的次级电压为 $u(t)=u_{\mathrm{m}}\sin\omega t$，如何计算 R 上的电压平均值．

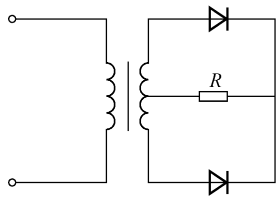


图4-1

引例2　保险收益模型[答案见本模块第五节]

问题的提出　某保险公司的一新生儿保险合同，其中几个条款（与本题无关的条款未摘录）如下．

（1）投保范围：未满一周岁的新生儿；

（2）投保人连续15年缴纳保险费1694元/年；

（3）保险公司给付金：

被保险人18岁时，给付成人保险金1万元；

被保险人22岁时，给付创业保险金1万元；

被保险人25岁时，给付婚嫁保险金1万元．

现在，不考虑保险的其他功能，仅从储蓄的角度出发比较买保险和直接存钱哪种方式合算，银行年连续复利率的三种情况如下．

（1）假设银行年连续复利率 $r=0.02$；

（2）假设银行年连续复利率 $r=0.02$，给付婚嫁保险金改为1.5万元；

（3）假设银行年连续复利率 $r = 0.05$，给付婚嫁保险金改为 1.5 万元.

引例 3　求变速直线运动的位移

问题提出 设飞机起飞时做变速直线运动，如图 4-2 所示.

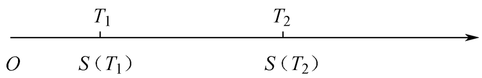


图 4-2

已知速度 $v(t)$ 是时间 t 的连续函数，且 $v(t) \geqslant 0$，计算飞机从时刻 T_1 到 T_2 这段时间内的位移 s.

在物理课上学习直线运动时，我们知道．只有当物体做匀速直线运动，即每一时刻的瞬时速度为常量 $v(t) \equiv v$ 时，位移 $s = v(T_2 - T_1)$，现在飞机做变速直线运动，显然不能用 $s = v(T_2 - T_1)$ 来计算位移，那该怎么办呢？

解决思路 我们注意到飞机的速度 $v(t)$ 是时间 t 的连续函数，连续函数有一个特点，函数值是连续变化的，当自变量变化很小时，函数值的变化也很小，具体到速度函数，当时间变化很小时，速度变化也很小，近似不变．这就是说，在很小的时间段 Δt_i 上，飞机的速度可近似成常量 v_i，飞机做匀速直线运动，从而经过的位移可以近似表示成 $\Delta s_i \approx v_i t_i$．这体现了**“以均匀代替非均匀，以不变代替变化，以常量代替变量”的数学思想**，这是解决问题的关键所在.

问题解决 根据上述思路，我们按如下步骤解决问题.

（1）分割

在时间段 $[T_1,T_2]$ 中任意插入若干个分点，把 $[T_1,T_2]$ 分割成若干个小时间段，每个小时间段记作 Δt_i.

（2）近似

在小时间段 Δt_i 上，任意取一个时刻的速度 v_i，飞机近似以 v_i 做匀速直线运动，于是在小时间段上走过的位移 Δs_i 可近似表示为 $\Delta s_i \approx v_i t_i$，并且在每个小时间段上都可以这样近似.

（3）求和

把所有小时间段上走过的位移的近似值相加，就得到总位移 s 的近似值 $s \approx \sum v_i \Delta t_i$.

（4）取极限

若让位移的近似值 $\sum v_i \Delta t_i$ 尽量接近准确值 s，就要在每个小时间段 Δt_i 上，让位移的近似值 $v_i \Delta t_i$ 尽量地接近准确值 Δs_i，这就要求在每个小时间段上，让速度的变化尽量小，怎么实现这个要求呢?

唯一的办法就是就是让每个小时间段都越来越小，也就是对整个时间段 $[T_1,T_2]$，插入更多的分点，让分割越来越细，实际上是取每个小时间段 $\Delta t_i \to 0$ 时的极限过程，这样处理以后，就有 $s = \lim\limits_{\Delta t_i \to 0} \sum v_i \Delta t_i$.

3．总结

综上，通过“分割—近似—求和—取极限”的步骤，将一个整体问题化为多个局部问题，经过恰当的近似，简化了问题，降低了求解难度，对局部的求和又获得了整体的近似

结果，再经过取极限的数学处理，求出了精确结果．这种解决方法体现了**“化整为零，近似代替，积零为整，无限逼近”**的数学辩证思想，也归纳出了精确求解**“非均匀分布总量问题”**的思路．

在高等阶段的数学学习中，我们将位移表达式$s=\lim\limits_{\Delta t_i\to 0}\sum v_i\Delta t_i$写成$s=\int_{T_1}^{T_2}v(t)\mathrm{d}t$，读作速度函数$v(t)$在时间段$[T_1,T_2]$上的定积分．

若将速度函数$v(t)$换成一般函数$f(x)$，将时间段$[T_1,T_2]$换成一般闭区间$[a,b]$，将自变量t换成x，可以写出如下表达式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这个表达式称为定积分．

第一节　定积分的概念

学习内容：定积分的概念．

目的要求：了解定积分的概念，理解定积分的几何意义．

重点难点：定积分的概念．

一、定积分的定义

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义且有界，按下列四步构造极限．

第一步：分割．用分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将区间$[a,b]$任意分成$n$个小区间$[x_{i-1},x_i]$（$i$=1，2，…，$n$），第$i$个小区间的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（$i$=1，2，…，$n$）．

第二步：取近似．在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i，取乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$（i=1，2，…，n）．

第三步：求和．

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

第四步：取极限．记$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，当$\lambda\to 0$时，取上述和式的极限

$$\lim_{\lambda\to 0}s_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

若上述和式的极限存在且为I，则称函数$f(x)$在$[a,b]$上是可积的，并称此极限值I为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分，记作

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

其中，$\int$ 称为积分号，x称为积分变量，$f(x)$称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$称为被积表达式，a，b分别称为积分下限和上限，$[a,b]$称为积分区间．

【说明】定积分既表示一个数学概念，又表示一种运算，$f(x)$在$[a,b]$上存在定积分也称为$f(x)$在$[a,b]$上可积．引例 3 表达了**定积分的物理意义**：做变速直线运动的物体在给定时间段上走过的位移．下面再讨论一个例子．

【案例】求曲边梯形的面积

所谓曲边梯形，是指由连续曲线 $y=f\left(x\right)$（设 $f\left(x\right)\geqslant 0$），直线 $x=a$， $x=b$ 和 x 轴（ $y=0$ ）所围成的图形．如图 4-3 所示的图形 $AabB$，其中有两边平行，第三边与这两边垂直，第四条边是曲线．

下面我们讨论曲边梯形面积．我们知道矩形面积的求法，但是此图形有一边是一条曲线，该如何求呢？

我们知道曲边梯形的高 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上是连续变化的，因此在很小的一区间段内其变化很小，近似于不变，并且当区间的长度无限缩小时，高的变化也无限减小．因此，如果把区间$[a,b]$分成许多小区间，在每个小区间上，用其中某一点的高来近似代替同一个小区间上的窄曲边梯形的高[在非均匀地变化]，我们再根据矩形的面积公式，即可求出相应窄曲边梯形面积[在非均匀地变化]的近似值，从而求出整个曲边梯形面积的近似值．显然，把区间$[a,b]$分得越细，所求出的面积值越接近于精确值，为此我们通过下列四步计算，如图 4-3 所示．

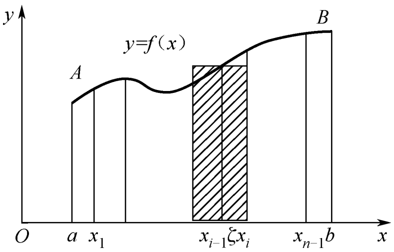


图 4-3

第一步：分割．用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将区间$[a,b]$任意分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$（i=1，2，…，n），第 i 个小区间的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（i=1，2，…，n）．

经过每一个分点作平行于 y 轴的直线段，把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形，各个窄曲边梯形的面积记为 ΔA_i（i=1，2，…，n）．

第二步：取近似．在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i，以 $f(\xi_i)$ 为高、Δx_i 为底的矩形面积为 $f(\xi_i)\Delta x_i$（i=1，2，…，n），把它作为窄曲边梯形面积 ΔA_i 的近似值，即

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad（i=1，2，\cdots，n）.$$

第三步：求和．将各窄曲边梯形面积的近似值加起来即得所求曲边梯形面积的近似值

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

第四步：取极限．记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\Delta x_i\right\}$，当 $\lambda\to 0$ 时，取上述和式的极限，得曲边梯形的面积为

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

求曲边梯形的面积就归结为求上述这种和式的极限．

【归纳总结】

从定积分的定义及两个案例可以看出，定积分表达了人们求解一类问题（非均匀分布总量问题）的统一的思路和处理过程．从数学含义上看，定积分本质上是一个极限，事实

上高等数学中连续、导数、定积分的概念都是用极限概念给出的，极限表述的是自变量趋于定值或无穷大时，函数的变化趋势；连续表述的是自变量趋于定值时极限值等于函数值，导数表述的是自变量趋于定值或无穷大时函数增量与自变量增量之比的极限；定积分表述的是对区间分割越来越细时，积分和的极限．可以看到，极限作为高等数学中的一个开创性的概念，将连续、导数、积分等概念联系在了一起，成为研究函数变化规律的一个重要工具．

说明：

（1）在$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$定义中，$a<b$．为应用的方便，补充规定：

① 当$b<a$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$；

② 当$b=a$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$．

（2）$f(x)$在区间[a，b]上可积的条件：

① $f(x)$在区间[a，b]上连续；

② $f(x)$在区间[a，b]上单调；

③ $f(x)$在区间[a，b]上有界且有有限个间断点．

（3）$f(x)$在区间[a，b]上可积⇒$f(x)$在区间[a，b]上有界，同时有，$f(x)$在区间[a，b]上无界⇒$f(x)$在区间[a，b]上不可积．

例如：$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$不存在，因为$\frac{1}{x}$在[0，1]上无界．

例题 1　利用定义计算定积分$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$．

解　把区间$[0,1]$分成n等份，　分点为$x_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n-1)$，小区间长度为

$$\Delta x_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$$

取$\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，求积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}).$$

因为$\lambda=\frac{1}{n}$，当$\lambda\to 0$时，$n\to\infty$，所以

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}.$$

二、定积分的几何意义

设由连续曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，$x=b$和x轴（或$y=0$）所围成的曲边梯形面积用A表示，其几何意义为：

当$f(x)\geqslant 0$时，如图 4-3 所示有$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=A$．特别地，在区间$[a,b]$上，若$f(x)\equiv 1$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$，它表示以区间$[a,b]$为底，高为 1 的矩形的面积，如图 4-4 所示．

当 $f(x) \leqslant 0$ 时，如图 4-5 所示，有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$.

当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正也有负时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于连续曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a$ ，$x=b$ 与 x 轴（或 $y=0$ ）所围成各部分图形面积的代数和（在 x 轴上方的为正面积，在 x 轴下方的为负面积），如图 4-6 所示，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$.

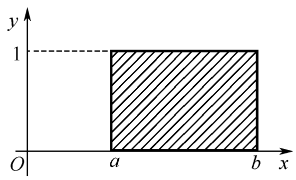


图 4-4

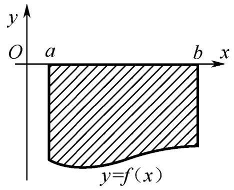


图 4-5

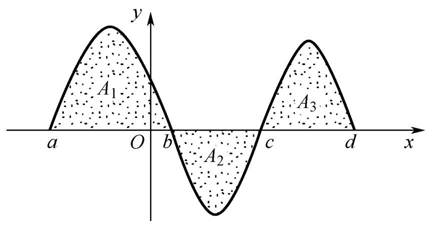


图 4-6

由此可得曲边梯形的面积用定积分表示为：

（1）当 $f(x) \geqslant 0$ 时，有 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ；

（2）当 $f(x) \leqslant 0$ 时，有 $A=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ；

（3）当 $f(x)$ 在 $[a,\mathrm{d}]$ 上有正也有负时（参见图 4-6），

$$A=\int_a^d |f(x)|\mathrm{d}x = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x .$$

例题 2　由定积分的几何意义，求 $\int_1^2 (x-3)\mathrm{d}x$.

解：在区间[1,2]上，$f(x)=x-3<0$ ，故 $\int_1^2 (x-3)\mathrm{d}x$ 表示如图 4-7 所示梯形面积 S 的相反数．此梯形的底为$|f(1)|$=2 和$|f(2)|$=1，高为 2−1=1，所以

$$\int_1^2 (x-3)\mathrm{d}x = -S = -\frac{(1+2)\times 1}{2} = -\frac{3}{2}$$

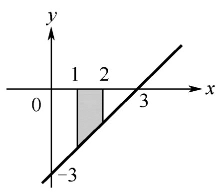


图 4-7

习题 4-1

1．用定积分的定义计算定积分 $\int_a^b c\mathrm{d}x$ ，其中 c 为一定常数．

2．用定积分表示下列阴影部分的面积（不要求计算）．

（1）S_1＝________（见图 4-8）；　　　（2）S_2＝_________（见图 4-9）．

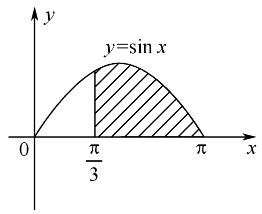


图 4-8

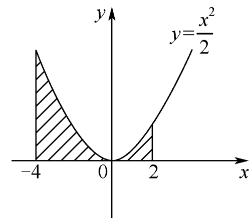


图 4-9

3．利用定积分的几何意义求定积分：

（1）$\int_0^1 2x\mathrm{d}x$；　　　　（2）$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$．

4．设生产某产品的总产量 $P(t)$ 对时间的变化率为 $y=f(t)$，在生产连续进行时，用定积分表示从 t_1 到 t_2 这段时间的总产量．

第二节　定积分的性质

学习内容：定积分的性质．

目的要求：熟练掌握定积分的性质，会利用定积分的性质进行分析、判断及计算定积分．

重点难点：定积分的性质，定积分性质的应用．

由定积分的定义可以看出，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中 a 是积分下限，b 是积分上限，所以 $a\neq b$，且 $a<b$，但为了计算需要，我们做如下规定：

（1）$a=b$ 时，$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$；

（2）当 $a>b$ 时，有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$．

假设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在给定的区间上是可积的，下面我们讨论定积分的一些性质，它们对定积分的计算是很有用的．

一、定积分的线性性质

性质 1　常数因子可以提到积分号前．即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证　由定积分的定义和极限的性质可得

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n kf(\zeta_i)\Delta x_i=k\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2　函数的代数和的定积分等于它们的定积分的代数和．即

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2 对有限个函数的代数和的情况仍然成立．

性质 1 和性质 2 可以合起来统一写作

$$\int_a^b [kf(x) \pm hg(x)]\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm h\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

二、定积分的区间可加性

可仿照性质 1 证明性质 3.

性质 3 （定积分对积分区间的可加性）　对任意三个数 a,b,c，总有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

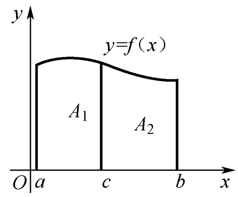


图 4-10

说明（1）当 $a<c<b$ 时，如图 4-10 所示，由定积分的几何意义可知，总面积 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是两块面积 $A_1=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $A_2=\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 的和.

（2）当 c 点在区间 $[a,b]$ 之外，假设 $a<b<c$ 时，由前一种情况有

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

其他情况可类似推出.

性质 4　若函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上都可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

例题 1　设 $f(x)=\begin{cases} 2 & -3\leqslant x\leqslant 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$，求 $\int_{-3}^{1}[5+2f(x)]\mathrm{d}x$.

解　由定积分的性质可得

$$\int_{-3}^{1}[5+2f(x)]\mathrm{d}x = 5\int_{-3}^{1}\mathrm{d}x + 2\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x = 20+2[\int_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x]$$

$$= 20+2[\int_{-3}^{0}2\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x] = 32+\frac{\pi}{2} .$$

三、定积分的单调性

性质 5 （比较性质）　如果在区间 $[a,b]$ 上，若 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

例题 2　比较下列积分值的大小：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x$；（2）$\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解　（1）当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$\sin x\leqslant\cos x$. 由性质 5 有 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x$.

（2）当 $x\in[0,1]$ 时，$x\leqslant\sqrt{x}$. 由性质 5 有 $\int_0^1 x\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

推论 1　如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且对每一个 $x\in[a,b]$，都有 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant 0 .$$

推论 2　如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x .$$

四、定积分的中值定理

性质 6　如果函数 $f(x)=c$，c 为常数，则函数 $f(x)=c$ 在 $[a,b]$ 上可积，且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c(b-a) .$$

证　由定积分的定义可知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = c\lim_{\lambda\to 0}(b-a) = c(b-a) .$$

性质 7（估值定理）　设 m 及 M 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值及最大值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) .$$

说明　性质 5 的几何意义是：曲边梯形的面积 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 介于以 $[a,b]$ 为底、函数 $y=f(x)$ 的最大值 M 和最小值 m 为高的两个矩形的面积之间，如图 4-11 所示.

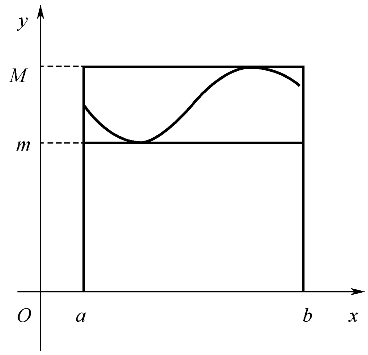


图 4-11

例题 3　估计定积分 $\int_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 的取值范围.

解　函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续，单调递增，则有 $\mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^2$，即 $1 \leqslant e^x \leqslant e^2$，即函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最小值为 1，最大值为 e^2，由估值定理得

$$1\times(2-0) \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^2\cdot(2-0)$$

即

$$2 \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \leqslant 2e^2$$

性质 8（积分中值定理）　如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) .$$

说明　积分中值定理的几何意义是：对于曲边梯形的面积 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，总有一个以 $[a,b]$ 为底，高为 $f(\xi)$（$a \leqslant \zeta \leqslant b$）的矩形面积和它相等，如图 4-12 所示.

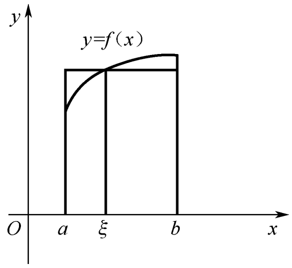


图 4-12

积分中值定理可改写为

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

通常称 $f(\xi)$ 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的积分平均值，简称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的平均值，记为 $\overline{y}$.

例题 4　求 $y=\sqrt{4-x^2}$ 在 $[-2,\ 2]$ 上的平均值.

解　由例 1 可知 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=2\pi$，所以 $\overline{y}=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

五、定积分的几个常用公式

设 $f(x)$ 在关于原点的对称的区间 $[a，b]$ 上可积，则

（1）当 $f(x)$ 为奇函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$；

（2）当 $f(x)$ 为偶函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

例如，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\mathrm{d}x=0$，$\int_{-1}^{1}x\mathrm{e}^{x^4}\mathrm{d}x=0$

习题 4-2

1．已知 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=8$，$\int_3^5 f(x)\ \mathrm{d}x=3$，求 $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

2．确定下列定积分的符号.

（1）$\int_1^2 x\ln x\mathrm{d}x$　　（2）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^4 x}{2}\mathrm{d}x$

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$　　（4）$\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x$

3．不计算定积分，比较下列各组定积分值的大小.

（1）$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$　　（2）$\int_1^3 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^3 x^3\mathrm{d}x$

（3）$\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 \ln^2 x\mathrm{d}x$　　（4）$\int_3^4 \ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_3^4 \ln^2 x\mathrm{d}x$

4．利用定积分的估值公式，估计下列各积分值的范围.

（1）$\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$　　（2）$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$　　（3）$\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$

（4）$\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$　　（5）$\int_{-1}^{1}(4x^4-2x^3+5)\ \mathrm{d}x$

5．求函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$　在闭区间[−1,1]上的平均值.

6．利用被积函数的奇偶性计算下列定积分.

（1）$\int_{-2}^{2} 2x\mathrm{d}x$　　（2）$\int_{-1}^{1}\left(2+\sin^5 x\right)\mathrm{d}x$

（3）$\int_{-2}^{2}(x+\sqrt{4-x^2})^2\mathrm{d}x$　　（4）$\int_{-1}^{1}\frac{2+\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

第三节　牛顿-莱布尼茨公式

学习内容：变上限的定积、原函数存在定理、微积分的基本定理（牛顿-莱布尼茨公式）

目的要求：理解变上限定积分的概念，了解原函数存在定理，掌握微积分的基本定理及其在电工学中的应用.

重点难点：牛顿-莱布尼茨公式的应用.

由引例 3 可知，如果物体以速度 $v(t)$ 做直线运动，那么在时间区间 $[a,b]$ 上所经过的位移为

$$s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t=s(b)-s(a)$$

由导数的物理意义可得，$s'(t)=\upsilon(t)$．也就是说 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的一个原函数，上式积分 $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ 的值可等于被积函数 $v(t)$ 的原函数 $s(t)$ 在积分上、下限 b、a 处的增量 $s(b)-s(a)$.

根据这个启示，来考察一般情形，如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，并且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

是否成立呢？

一、变上限的定积分

1．变上限定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，若 $x\in[a,b]$，则称函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为变上限的定积分.

2．函数 $F(x)$ 的几何意义

函数 $F(x)$ 表示右侧一边可以平行移动的曲边梯形 $aABx$ 的面积．如图 4-13 所示，这个梯形的面积是随 x 位置的变动而变化，且当 x 给定后，这条边就确定，面积 $F(x)$ 也随之而定，因而 $F(x)$ 是 x 的函数，也称为变上限函数.

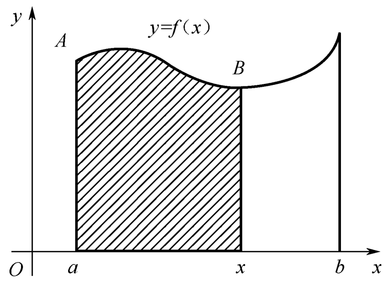


图 4-13

3. 函数 $F(x)$ 的性质

（1） $F(a)=0$， $F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

二、原函数存在定理

定理 1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，即

$$F'(x)=(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t)'=f(x)$$

这个定理就是原函数存在定理，它建立了导数与积分之间的关系，也说明了本模块第二节开始给出的一个结论：如果函数 $f(x)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，则在该区间上 $f(x)$ 的原函数一定存在.

例题 1 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int_0^x t\sin^2 t\mathrm{d}t)$

解 由定理 1 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int_0^x t\sin^2 t\mathrm{d}t)=x\sin^2 x\ .$$

例题 2 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int_x^1 \frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t)$

解 由于定理是对积分上限求导，所以先交换积分上下限，再求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int_x^1 \frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^x \frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)=-\frac{\cos x}{1+x^2}\ .$$

例题 3 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int_0^{x^2} \frac{\cos t}{2+t}\mathrm{d}t)$

解 由于上限是 x 的函数，所以可把 $3x^2$ 看作 u，根据复合函数的求导法则，先对 u 求导，再对 x 求到，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int_0^{x^2} \frac{\cos t}{2+t}\mathrm{d}t)=\frac{\cos x^2}{2+x^2}(x^2)'=\frac{2x\cos x^2}{2+x^2}\ .$$

由本例题得到如下的一般结论

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=f(\varphi(x))\varphi'(x)\ .$$

三、微积分基本定理

定理 2（微积分的基本定理）　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的任一原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \overset{\text{记作}}{=} F(x)\Big|_a^b .$$

这个公式称为牛顿-莱布尼茨公式，也称为微积分的基本公式.

牛顿-莱布尼茨公式揭示了定积分与不定积分之间的联系，把积分和微分这两个不同的概念联系了起来，从而把求定积分的问题化为求原函数的问题，给定积分的计算提供了有效而简便的方法，因此它是一个很重要的公式.

例题 4　求 $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$.

解　$\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\times 1^4 - \frac{1}{4}\times 0^4 = \frac{1}{4}$.

例题 5　求 $\int_0^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

解　$\int_0^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_0^3 = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^3 - 1$.

例题 6　求 $\int_1^2 (x^2+2)\mathrm{d}x$.

解　$\int_1^2 (x^2+2)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+2\right) = \frac{13}{3}$.

例题 7　求 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$.

例题 8　求 $\int_{-3}^1 |x|\mathrm{d}x$

解　先去掉被积函数的绝对值的符号，再由定积分对积分区间的可加性可得

$$\int_{-3}^1 |x|\mathrm{d}x = \int_{-3}^0 (-x)\mathrm{d}x + \int_0^1 x\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 5$$

例题 9　计算由曲线 $y=\sin x$ 在 $x=0$，$x=\pi$ 之间及 x 轴所围成的图形的面积 A.

解　如图 4-14 所示，由定积分的几何意义，面积 A 为

$$A = \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

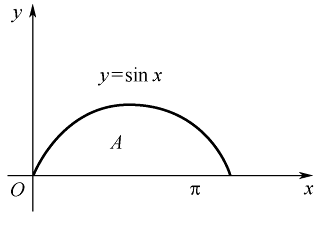


图 4-14

例题 10　已知自由落体运动为 $v(t)=gt$，求在时间 $[0,T]$ 内物体下落的位移 s.

解 物体下落的位移 s 可以由定积分表示为

$$s=\int_0^T gt\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2\Big|_0^T=\frac{1}{2}gT^2$$

【衔接专业】计算纯电阻电路中正弦交流电 $i=I_{\mathrm{m}}\sin\omega t$ 在一个周期内功率的平均值.

解 设电阻为 R，则在该电路中 R 两端的电压是

$$u=Ri=RI_{\mathrm{m}}\sin\omega t$$

功率为

$$P=ui=Ri^2=RI_{\mathrm{m}}{}^2\sin^2\omega t$$

由于交流电 $i=I_{\mathrm{m}}\sin\omega t$ 的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，因此在一个周期上，P 的平均值为

$$\begin{aligned}\overline{P}&=\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}RI_{\mathrm{m}}{}^2\sin^2\omega t\mathrm{d}t\\&=\frac{\omega R}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}I_{\mathrm{m}}{}^2\left(\frac{1-\cos2\omega t}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{\omega RI_{\mathrm{m}}{}^2}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(1-\cos2\omega t)\mathrm{d}t\\&=\frac{\omega RI_{\mathrm{m}}{}^2}{4\pi}\left[t-\frac{1}{2\omega}\sin2\omega t\right]\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\\&=\frac{\omega RI_{\mathrm{m}}{}^2}{4\pi}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{RI_{\mathrm{m}}{}^2}{2}=\frac{I_{\mathrm{m}}u_{\mathrm{m}}}{2}\ (\text{功率单位})\end{aligned}$$

这说明，纯电阻电路中正弦交流电的平均功率等于电流和电压的峰值乘积的一半，通常交流电器上标明的功率就是平均功率.

习题 4-3

1．求下列导数.

（1）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$　　（2）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{\ln2}^x t^5\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$；

（3）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$；　　（4）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\ (x>0)$

2．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t\mathrm{d}t}{x^2}$　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_a^x(1+\frac{1}{t})^t\mathrm{d}t}{x}$

3．计算下列定积分.

（1）$\displaystyle\int_0^2|1-x|\mathrm{d}x$　　（2）$\displaystyle\int_{-2}^1x^2|x|\mathrm{d}x$　　（3）$\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$

（4）$\displaystyle\int_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$　　（5）$\displaystyle\int_{-1}^2\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$　　（6）$\displaystyle\int_0^3\sqrt{(2-x)^2}\mathrm{d}x$

4．计算下列定积分．

（1）若 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x & -1\leqslant x<0 \end{cases}$，求 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

（2）设 $f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi \end{cases}$，求 $\int_{0}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

5．计算下列定积分．

（1）$\int_0^1 x^{100}\mathrm{d}x$　　（2）$\int_1^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x$　　（3）$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

（4）$\int_0^1 100^x\,\mathrm{d}x$　　（5）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$　　（6）$\int_1^2 \dfrac{2}{x}\mathrm{d}x$

第四节　定积分的计算

学习内容：定积分的计算．

目的要求：熟练掌握定积分计算的基本方法，包括分项积分法、分段积分法、换元积分法以及分部积分法，掌握定积分的实际应用．

重点难点：定积分的分部积分法公式，定积分积分法的应用．

定积分的计算是微积分学的重要内容，其应用十分广泛，它是包括数学及其其他学科的基础.

下面介绍常见的定积分计算方法，其中包括分项积分法、分段积分法、换元积分法以及分部积分法.

一、分项积分法

我们常把一个复杂的函数分解成几个简单的函数之和，如 $f(x)=k_1g_1(x)+k_2g_2(x)$，若右端的积分可求，则应用法则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=k_1\int_a^b g_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^b g_2(x)\mathrm{d}x$（$k_1$ 和 k_2 是不全为零的任意常数)，就可求出积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，这就是分项积分法.

例题 1　计算定积分 $\int_1^2 \dfrac{1}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x&=\int_1^2 \frac{(1+x^2)-x^2}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x-\int_1^2 \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x\\&=\int_1^2 \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x-\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{3x^3}\Big|_1^2+\frac{1}{x}\Big|_1^2+\arctan x\Big|_1^2\\&=-\frac{5}{24}+\arctan 2-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

二、分段积分法

分段函数的定积分要分段进行计算，这里重要的是搞清楚积分限与分段函数的分界点之间的位置关系，以便对定积分进行正确地分段.

被积函数中含有绝对值时，也可以看成分段函数，这是因为正数与负数的绝对值是以不同的方式定义的，0 就是其分界点.

例题 2 计算定积分 $\int_{-1}^{3}|2-x|\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int_{-1}^{2}|2-x|\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}|2-x|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(2-x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}(x-2)\mathrm{d}x$

$$=(2x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{2}+(\frac{1}{2}x^2-2x)\Big|_{2}^{3}=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$$

例题 3 计算定积分 $\int_{0}^{2}f(x-1)\mathrm{d}x$ ，其中 $f(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$.

解 由于函数 $f(x)$ 的分界点为 0，所以，令 $t=x-1$ 后，有积分上限变为 2−1=1，积分下限变为 0−1=−1，被积函数的形式与所选的字母无关.

$$\int_{0}^{2}f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{1}=\left[0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]+\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{5}{6}\quad .$$

三、换元积分法

【定理】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，做代换 $x=\varphi(t)$ ，其中 $\varphi(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数 $\varphi'(t)$，当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时， $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$ ，且 $\varphi(\alpha)=a$ ， $\varphi(\beta)=b$ ，则

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

例题 4 计算定积分 $\int_{0}^{3}\frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

解 设 $\sqrt{1+x}=t$ ，则 $x=t^2-1$ ， $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时， $t=1$ ；当 $x=3$ 时， $t=2$.
根据上面定理得

$$\int_{0}^{3}\frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\frac{t^2-1}{t}2t\mathrm{d}t=2\int_{1}^{2}\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t=2(\frac{1}{3}t^3-t)\Big|_{1}^{2}=\frac{8}{3}$$

例题 5 计算定积分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin x\mathrm{d}x$.

解法 1 设 $t=\cos x$ ，则 $\mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$. 当 $x=0$ 时， $t=1$ ；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $t=0$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin x\mathrm{d}x=\int_{1}^{0}t^3\left(-\mathrm{d}t\right)=\int_{0}^{1}t^3\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^4\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{4}.$$

解法 2 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\mathrm{d}\cos x=-\frac{1}{4}\cos^4 x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$.

说明：（1）用 $x=\varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量 t 时，积分限也相应地改变.

（2）求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\varPhi(t)$ 后，不必像计算不定积分那样再要把 $\varPhi(t)$ 变换

成原变量x的函数，而只要把新变量t的上、下限分别代入$\Phi(t)$后相减就行了.

（3）用凑微分法解定积分时可以不换元（如例题5解法2），当然也就不存在换上下限的问题了.

【衔接专业】　电容元件上的电场能量

充电后，电容器中的电场能量可按以下方法求得.

电容的瞬时功率为 $$P_c = u_c i = u_c c\frac{du_c}{dt}$$

设$t=0$时，电容上的电压为 0，经过时间t，电压升至u_c. 则任意时刻电容储存的电场能量为

$$W_c = \int_0^t P_c dt = \int_0^t u_c c\frac{du_c}{dt}$$
$$= \int_0^{u_c} cu_c du_c = \frac{1}{2}cu_c^{\ 2}$$

四、分部积分法

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$具有连续的导数，则由不定积分的分部积分公式得：

$$\int_a^b uv'dx = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx$$

或

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

此公式称为定积分的分部积分法公式.

利用分部积分法主要是把所求积分中的被积表达式适当地分成u和dv两部分，所以这种积分法关键是正确地选择u和dv. 一般地，u和dv的选取原则是：

（1）由dv易求v；

（2）$\int vdu$比$\int udv$易求.

例题6　求$\int_0^1 x\sin x dx$.

解　设$u=x$，$dv=\sin x dx=-d(\cos x)$，则$v=-\cos x$.

由分部积分法公式，有

$$\int_0^1 x\sin xdx = -x\cos x\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos xdx = -x\cos x\Big|_0^1 + \sin x\Big|_0^1 = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$$

例题7　求$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x dx$.

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} xd(\sin x) = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin xdx$$
$$= (\frac{\pi}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

例题8　求$\int_0^1 xe^x dx$.

解 $\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}e^x=(xe^x)\Big|_0^1-\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-\mathrm{e}+1=1$

例题 9 求 $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\ln x,\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$，所以 $v=\frac{1}{2}x^2$，由分部积分法公式，有

$$=(\frac{1}{2}x^2\ln x)\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x^2\mathrm{d}(\ln x)=(\frac{1}{2}x^2\ln x)\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-(\frac{1}{4}x^2)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+\frac{1}{4}.$$

熟练后u、v就不必假设出来，只要默默记在心里即可.

例题 10 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解 因为 $\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}(-\cos x)=-\mathrm{e}^x\cos x+\int\cos x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$=-\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}(\sin x)=-\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$$

所以
$$\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C$$

所以
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}$$

一般地，被积函数具有下列形式时，可用分部积分法：

（1）幂函数与指数函数（或三角函数）之积，形如$x^n\mathrm{e}^{kx}$、$x^n\sin kx$、$x^n\cos kx$（其中，n为正整数，$k\neq 0$），应选x^n为u，其余部分为$\mathrm{d}v$.

（2）幂函数与对数函数（或反三角函数）之积，形如$x^n\ln x$、$x^n\arcsin x$、$x^n\arccos x$、$x^n\arctan x$（其中，n为正整数），应选$\ln x$、$\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$为u，其余部分为$\mathrm{d}v$.

（3）三角函数与指数函数之积，形如$\mathrm{e}^{ax}\sin bx$、$\mathrm{e}^{ax}\cos bx$（其中，a和b为实数），可以任意的选择u、$\mathrm{d}v$，但要连续两次用分部积分法，出现“循环”后，移项解方程.

定积分与不定积分有密切联系（牛顿-莱布尼茨公式揭示了其联系），其计算的基本步骤和思路与不定积分有很多相似的地方，例如恒等变形、一些常用的凑微分、换元和分部积分的典型类型和原则．但与不定积分有很多不同的地方，比如定积分的结果与积分表达式中所用的符号（积分变量）无关，而不定积分的结果必须是一簇以原积分变量为自变量的函数；定积分在换元时除了要变换积分表达式，同时还要变换积分上、下限.

【衔接专业】 电感元件的磁场能量

电感元件流过电流建立磁场，储存一定的磁场能量．其能量大小，可按下列方法求得.电感元件的瞬时功率为

$$P_1=u_1i=I_i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

设$t=0$时，电感流量为 0，经过时间t，电流增至i_1，则任意时刻t，电感储存的磁场能量为

$$W_1=\int_0^t p_1\mathrm{d}t=\int_0^t u_1i\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{i_1} I_i\mathrm{d}i=\frac{1}{2}{I_i}^2$$

习题 4-4

1．计算下列积分．

（1）$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin(x+\frac{\pi}{3})\mathrm{d}x$　　（2）$\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}$

（3）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$　　（4）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$

（5）$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2u\mathrm{d}u$　　（6）$\int_{1}^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$

（7）$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$　　（8）$\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$

（9）$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$　　（10）$\int_{2}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$

2．计算下列定积分．

（1）$\int_{0}^{1}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　（2）$\int_{1}^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x$

（3）$\int_{1}^{4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　（4）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2x}\mathrm{d}x$

（5）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$　　（6）$\int_{1}^{2}x\log_2 x\mathrm{d}x$

（7）$\int_{0}^{\pi}(x\sin x)^2\mathrm{d}x$　　（8）$\int_{1}^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x$

第五节　应用实训

定积分是微积分理论的重要内容，它是解决许多实际问题的重要工具．定积分在电学、企业管理、经济与金融、物理学、医学等领域有广泛的应用，内容十分丰富．电学中的充电电压问题、交流电整流问题，管理学中的广告策略问题、投资回收问题、保管费用问题，经济学中的净增长问题、消费支出问题，物理学中平均功率问题、闸门所受水压力等问题都可以借助定积分或微元法来解决．

通过本节的学习，可使同学们进一步理解定积分的实质，学会利用定积分理论来解决电学、企业管理、经济与金融、几何学等领域的有关问题，提高大家分析问题、解决问题的能力，进一步培养同学们的数学素养和创新能力．

一、定积分的微元法

在定积分的定义中采用了“分割、取近似、求和、取极限”的方法，求得了一个整体量．在这四个步骤中，关键是“局部取近似”．事实上，许多几何和物理量都可以使用此方

法．为了方便，把计算在区间$\left[a,b\right]$上的某个量A的定积分的方法简化为**微元法**.

1．求微分

找出量 A 在任一具有代表性的区间$\left[x,x+\mathrm{d}x\right]$上部分量$\Delta A$的近似值$\mathrm{d}A$，即$\mathrm{d}A=f\left(x\right)\mathrm{d}x$（微元）.

2．求积分

整体量A就是$\mathrm{d}A$在区间$[a,b]$上的定积分，即

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ .$$

以求曲边梯形面积S问题（见图 4-15）为例，用微元法就可以简写成：

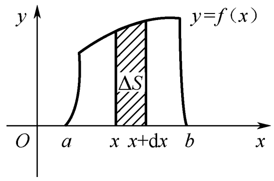


图 4-15

任取微段$\left[x,x+\mathrm{d}x\right]$，曲边梯形在此微段部分的面积微元$\mathrm{d}s=f\left(x\right)\mathrm{d}x$，所以

$$s=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ .$$

【衔接专业】在交流电路中，一个二端网络所吸收或发出的功率P是随时间变化的，按照“微元法”，设在$\mathrm{d}t$时间内网络吸收或发出的电能为$\mathrm{d}W$（电能的微元），则

$$\mathrm{d}W=P\mathrm{d}t=ui\mathrm{d}t$$

那么从t_1到t_2的一段时间内，网络吸收或发出的电能为电能的微元在时间段$[t_1,t_2]$上的定积分，即

$$W=\int_{t_1}^{t_2}P\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}ui\mathrm{d}t$$

二、求平面图形的面积

一般地，由两条连续曲线$y=g(x)$，$y=f(x)$与两条直线$x=a$，$x=b$ $(a<b)$所围的平面图形（见图 4-16）（假定$g(x)\leqslant f(x)$）的面积，按如下方法求得：

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$

当不能确定$y=g(x)$与$y=f(x)$谁在上面时，则以$y=g(x)$, $y=f(x)$为边界与直线$x=a$, $x=b$ $(a<b)$所围图形的面积应记为

$$A=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^b(\text{上}-\text{下})\mathrm{d}x$$

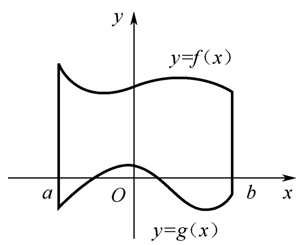


图 4-16

类似地，由连续曲线$x=\varphi(y)\geqslant 0$，y轴与直线$y=c$，$y=d$（$c<d$）所围成的曲边梯形面积（见图 4-17）为

$$A=\int_c^{\mathrm{d}}\varphi(y)\mathrm{d}y$$

一般地，由连续曲线$x=\varphi(y)$，$x=\phi(y)$及两条直线$y=c$，$y=d$（$c<d$）所围成的

平面图形的面积（见图 4-18）为

$$A=\int_c^d|\varphi(y)-\phi(y)|\mathrm{d}y=\int_c^d(右-左)\mathrm{d}y$$

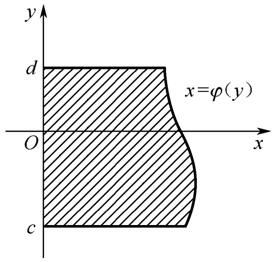


图 4-17

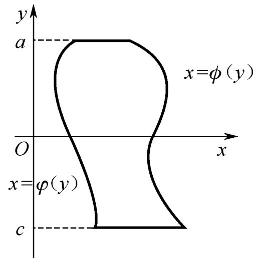


图 4-18

例题 1　求曲线 $y=x^2$、直线 $x=1$ 和 x 轴所围成图形的面积？

解：如图 4-19 所示，取 x 为积分变量，积分区间为[0,1]，则

$$A=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

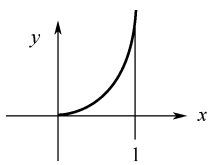


图 4-19

例题 2　求曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成图形的面积？

解：如图 4-20 所示，过交点作 x 轴的垂线，则所求面积成为两个曲边三角形面积之差. 即取 x 为积分变量，积分区间为[0,1]，所以

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

例题 3　求由曲线 $y^2=2x$ 与 $y=4-x$ 所围图形的面积.

解　画草图如图 4-21 所示.

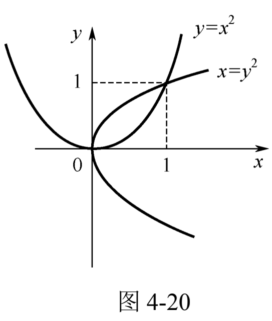


图 4-20

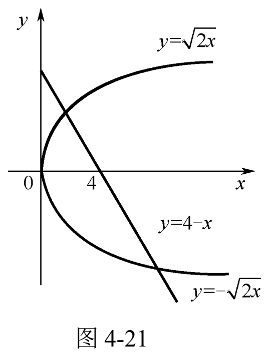


图 4-21

确定积分变量为 y，解方程组 $\begin{cases}y^2=2x\\ y=4-x\end{cases}$ 得交点 $(2,2)$，$(8,-4)$，于是得积分区间为

$[-4,2]$.

所以所求图形面积为

$$A=\int_{-4}^{2}(4-y-\frac{y^2}{2})\mathrm{d}y=(4y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}y^3)\Big|_{-4}^{2}=18.$$

例题 4 求由 $y=x$，$y=2x$，$x+y=6$ 所围图形的面积.

解 如图 4-22 所示，解方程组

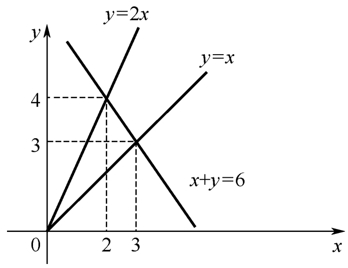


图 4-22

$$\begin{cases} y=2x \\ x+y=6 \end{cases} 和 \begin{cases} y=x \\ x+y=6 \end{cases}$$

得交点 $(2,4)$ 和 $(3,3)$.

积分变量为 x，则积分区间分别为 $[0,2]$，$[2,3]$，则所求图形的面积为

$$A=\int_{0}^{2}(2x-x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}(6-x-x)\mathrm{d}x=(\frac{1}{2}x^2)\Big|_{0}^{2}+(6x-x^2)\Big|_{2}^{3}=3.$$

该题也可以取 y 为积分变量，此时积分区间为 $[0,3]$，$[3,4]$，所求图形的面积为

$$A=\int_{0}^{3}(y-\frac{y}{2})\mathrm{d}y+\int_{3}^{4}(6-y-\frac{y}{2})\mathrm{d}y=\frac{y^2}{4}\Big|_{0}^{3}+(6y-\frac{3y^2}{4})\Big|_{3}^{4}=3.$$

说明 用定积分求几何图形的面积，既可选取 x 为积分变量，也可选取 y 为积分变量. 但积分变量的选取，决定了图形用不用分块，即表示面积的定积分是用一个表达式还是用几个表达式. 一般情况下，选取积分变量的原则是，尽量使图形不分块（用一个定积分表示）和少分块（必须分块时）.

归纳出解题步骤：

（1）画草图；

（2）由图选取积分变量，求出积分区间；

（3）写出面积公式.

① 选 x 为积分变量，确定 x 的范围 $[a,b]$，$S=\int_{a}^{b}(上-下)\mathrm{d}x$；

② 选 y 为积分变量，确定 y 的范围 $[c,d]$，$S=\int_{c}^{d}(右-左)\mathrm{d}y$.

三、求旋转体的体积

1．旋转体的定义

一平面图形绕平面内一定直线旋转一周所成的立体称为旋转体．如：圆柱体、圆锥体、

球体等都是旋转体.

2．旋转体体积计算（用微元法或公式法求解）

现求由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转所成旋转体（见图 4-23）的体积.

由微元法知，取 x 为积分变量，在区间 $[a,b]$ 上取任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，此时，旋转体的体积微元 $\mathrm{d}V=\pi f^2(x)\mathrm{d}x$，所以旋转体的体积为

$$V_x=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

同理得，曲线 $x=g(y)$、直线 $y=c$ 和 $y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转所成旋转体（见图 4-24）的体积：

$$V_y=\int_c^d \pi g^2(y)\mathrm{d}y$$

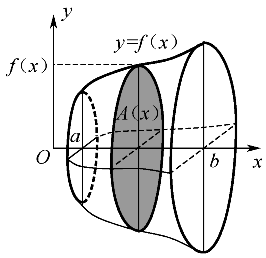


图 4-23

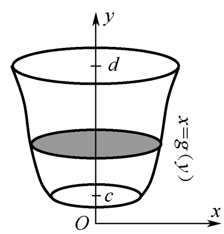


图 4-24

例题 5　求曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体（见图 4-25）体积 V_x.

解：$V_x=\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(\sin x)^2\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\left(x-\dfrac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}$

$=\dfrac{\pi^2}{2}$

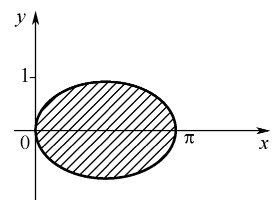


图 4-25

四、电工学中的问题

例题 6　[电容器充电问题]　在 RC 充放电路（见图 4-26）中，电源电压为 E，电阻阻值为 R，电容器容量为 C，充电时电流为 $i(t)=\dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}}$，求充电过程结束后，电容器上的电压 U_{C}.

解　整个充电过程从理论上讲充电时间是无限长，所以累积电荷量应该是电流在 $(0,+\infty)$ 时间段上的广义积分，即

$$Q=\int_0^{+\infty}i(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\mathrm{d}t=-EC\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=-EC(\mathrm{e}^{-\infty}-\mathrm{e}^{0})=EC$$

再由充电器电压公式 $U_{\mathrm{C}}=\dfrac{Q}{C}$，得 $U_{\mathrm{C}}=E$.

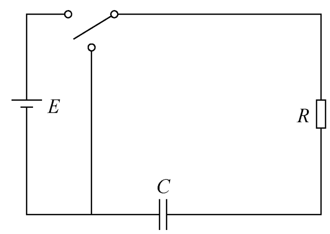


图 4-26

上式说明只要充电时间足够长，电容器上的电压可以达到电源电压 E .

例题 7　交流电整流问题[见本模块引例 1]

解　变压器的初级电压周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ ，经整流后变成周期为 $\dfrac{\pi}{\omega}$ 的电压 $u(t)=u_{\mathrm{m}}\sin\omega t$ ，它就是负载 R 上的电压，其平均值可由下面定积分求得.

$$\bar{u}=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}u_{\mathrm{m}}\sin\omega t\mathrm{d}\omega t=-\frac{u_{\mathrm{m}}}{\pi}[\cos\omega t]\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=-\frac{u_{\mathrm{m}}}{\pi}[\cos\pi-\cos 0]=\frac{2u_{\mathrm{m}}}{\pi}=0.637u_{\mathrm{m}}$$

五、汽车减震问题

例题 8　根据胡克定律，弹簧的弹力与形变的长度成正比．已知汽车车厢下的减震弹簧压缩 1cm，需要用 14000N 的力，求弹簧压缩 2cm 时所做的功.

解　弹簧的弹力的计算公式为 $f=kx$（k 为常数），当 $x=0.01\mathrm{m}$ 时，$f(0.01)=k\times0.01=1.4\times10^4\mathrm{N}$ ，由此可知，$k=1.4\times10^6$ ，故 $f(x)=1.4\times10^6x$ ．于是所做的功 $W=\int_0^{0.02}1.4\times10^6x\mathrm{d}x=1.4\times10^6\times\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{0.02}=280(\mathrm{J})$ ，即弹簧压缩 2cm 时所做的功为 280J .

六、金融问题

例题 9　保险收益模型[见本模块引例 2]

问题解决　为了使保险金和直接存钱能在同一层面上进行比较，我们通常对投保人缴纳的保险金和保险给付的保险金分别进行现值计算，然后就现值进行比较，给出本题结论.

（1）投保人缴纳保险费的现值计算——收益现值法

收益现值法又称收益还原法、收益资本金化法，是指通过估算被评估资产的未来预期收益并折算成现值，借以确定被评估资产价值的一种资产评估方法．收益现值法的基本公式为

$$P=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_t}{(1+r)^t}\approx\int_0^nF_t\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t$$

其中，P 为资产评估价值，F_t 为第 t 年资产预期收益，n 为资产的经营期限，r 为年连续复利率.

本题中投保人缴纳保险费的现值

$$P \approx \int_0^{15} 1694 \cdot \mathrm{e}^{-rt} \mathrm{d}t = -\frac{1694}{r} \cdot (\mathrm{e}^{-15r} - 1)$$

计算可得：当 $r = 0.02$ 时，$P = 21953$元；当 $r = 0.05$ 时，$P = 17876$元．

保险公司三年的给付分别设为 a、b、c，均可以结算成现值，其现值总额

$$R = \frac{a}{(1+r)^{18}} + \frac{b}{(1+r)^{22}} + \frac{c}{(1+r)^{25}}$$

由此计算可得：

当 $r = 0.02$，a=10000，b=10000，c=10000 时，$R = 19565$元＜21953元；

当 $r = 0.02$，a=10000，b=10000，c=15000 时，$R = 22613$元＞21953元；

当 $r = 0.05$，a=10000，b=10000，c=15000 时，$R = 12003$元＜17876元．

由前面计算可知，仅从储蓄的角度上说，情况一和情况三是存钱更合算，情况二是买保险更合算.

七、企业管理问题

1．广告策略问题

问题提出 某公司每月销售额 1000 000 美元，平均利润是销售额的 10%．根据公司以往的经验，广告宣传期间月销售的变化率近似地服从增长曲线 $1000000\mathrm{e}^{0.02t}$（$t$ 以月为单位），公司现在需要决定是否举行一次类似的总成本为 130 000 美元的广告活动．按惯例，对于超过 100 000 美元的广告活动，如果每年新增销售额产生的利润超过广告投资的 10%，则决定做广告．试问该公司按惯例是否应该做此广告？

问题解决　12 个月后总销售额为

$$\begin{aligned}\int_0^{12} 1000000\mathrm{e}^{0.02t} \mathrm{d}t &= \left.\frac{1000000\mathrm{e}^{0.02t}}{0.02}\right|_0^{12} \\ &= 50000000(\mathrm{e}^{0.24} - 1) \\ &\approx 13560000 \text{（美元）}\end{aligned}$$

已知公司的利润是总销售额的 10%，所以新增销售额产生的利润是

$$0.10 \times (13560\,000 - 12000\,000) = 156000 \text{（美元）}$$

156000 美元是由于花费 130000 美元的广告费而取得的，因此广告所产生的实际利润是

$$156000 - 130000 = 26000 \text{（美元）}$$

由此可见，盈利大于广告成本的 10%，因此，公司应该做此广告．

2．资本回收问题

问题提出　某公司一次投资 100 万建造一条生产流水线，并于一年后建成投产，开始取得经济效益．假设流水线的收益是均匀货币流，年流量为 30 万元，同时已知银行利率为 10%．问多少年后该公司可以收回投资？

问题解决　假设 $x+1$ 年后可以收回投资，此时流水线共运行了 x 年，则可计算出 x 年中流水线的总收益为

$$A(x) = \frac{a}{r}(\mathrm{e}^{rx} - 1) = \frac{30}{0.1}(\mathrm{e}^{0.1x} - 1) \text{（其中，} a \text{ 表示年流量，} r \text{ 表示年利率）}$$

$A(x)$ 在 $x+1$ 年之前（即开始投资时）的价值为

$$\begin{aligned}B(x) &= A(x)\mathrm{e}^{r(r+1)} \\ &= \frac{30}{0.1}(\mathrm{e}^{-0.1x}-1)\mathrm{e}^{-0.1x}\times\mathrm{e}^{-0.1} \\ &= 300\mathrm{e}^{-0.1}(1-\mathrm{e}^{-0.1x})\end{aligned}$$

因此，当 $B(x)=100$ 万元时恰好收回投资，即

$$300\mathrm{e}^{-0.1}(1-\mathrm{e}^{-0.1x})=100$$

解方程得

$$x=10\ln\frac{3}{3-\mathrm{e}^{0.1}}\approx 4.6 \text{（年）}$$

可以看出，5.6 年该公司就可以收回全部投资.

3. 保管费支付问题

公司每天支付仓库的租金、保险费、保证金等都与商品的库存量有关．现在有一个公司，它每 30 天会收到 1200 箱巧克力，随后，它每天按一定的比例卖给零售商，已知到货后的 x 天，公司库存量是 $I(x)=1200-\sqrt{30x}$（箱）．一箱巧克力的保管费是 0.05 元．问公司平均每天要支付多少保管费？

解 应用积分中值定理得平均每天的库存量为

$$y=\frac{1}{30}\int_0^{30}(1200-40\sqrt{3x})\mathrm{d}x=400 \text{（箱）}$$

故公司每天要支付 $0.05\times 400=20$ 元保管费.

八、定积分在物理学中的应用

由物理学知识可知，物体在常力 F 的作用下，沿力的方向做直线运动，当物体发生了位移 S 时，力 F 对物体所作的功是 $W=FS$．但在实际问题中，物体在发生位移的过程中所受到的力常常是变化的，这就需要考虑变力做功的问题．由于所求的功是一个整体量，且对于区间具有可加性，所以可以用微元法来求这个量.

设物体在变力的作用下，沿 x 轴由点 a 移动到点 b，且变力方向与 x 轴方向一致．取 x 为积分变量，$x\in[a,b]$．在区间 $[a,b]$ 上任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，该区间上各点处的力可以用点 x 处的力 $F(x)$ 近似代替.

因此功的微元为 $\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$，$F=f(x)$．所以，从 a 到 b 这一段位移上变力 $F(x)$ 所做的功为 $W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$.

例题 10 修建一道梯形闸门，它的两条底边各长 6m 和 4m，高为 6m，较长的底边与水面平齐，计算闸门一侧所受水的压力.

解 根据题设条件，建立如图 4-27 所示的坐标系，AB 的方程为

$$y=-\frac{1}{6}x+3$$

取 x 为积分变量，$x\in[0,6]$，压力微元为

$$\mathrm{d}F=2\rho gxy\mathrm{d}x=2\times 9.8\times 10^3 x(-\frac{1}{6}x+3)\mathrm{d}x$$

从而所求的压力为

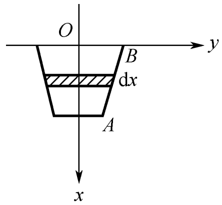


图 4-27

$$F=\int_0^6 9.8\times10^3(-\frac{1}{3}x^2+6x)\mathrm{d}x=9.8\times10^3\left(-\frac{1}{9}x^3+3x^2\right)\Big|_0^6\approx8.23\times10^5(\mathrm{N}).$$

说明：定积分在物理学中有着广泛的应用.

第六节　释疑问答

问题 1　怎样理解分割这个步骤？

分割是在区间$[a,b]$上任取一组点列，将区间分成n份，除第一个点及末端的点必须取区间的端点外（$x_0=a$，$x_n=b$），其余$n-1$个点在区间内处于什么位置，不受任何限制，可以是等分点，也可以不是等分点，等分点只是为了在解决实际问题中更方便.

问题 2　怎样理解和数极限的极限过程？

对和数取极限，如果存在，便是所定义的定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

这个极限过程是对每个小区间长无限接近于零来说的，怎样才能保证每个小区间长$\Delta x_i\to0$呢？只要最大的小区间长$\Delta\to0$即可，当$\Delta\to0$时，分点将无限增加，即$n\to\infty$，且每个小区间长$\Delta x_i\to0$．但仅当$n\to\infty$时，不能保证$\Delta\to0$．因此，尽管分点无限增加，仍可能有若干个小区间长不无限接近于零．如果在等分的条件下，那么$n\to\infty$就相当于$\Delta\to0$．因为只要分点无限增加，便可保证每个小区间长$\Delta x_i\to0$.

和数极限即定积分是一个确定的数值．这个值只与被积函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关，与分割及ξ_i的选取无关．对于同一函数$f(x)$及区间$[a,b]$来说，不论怎样分割及怎样选取ξ_i，和数极限都是一个唯一确定的值．由于极限值与变量的记法无关，故有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

即

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

问题 3　定积分换元法与不定积分换元法有什么区别？

有如下两个区别：

首先，用换元法求定积分时，要求相应地改变积分限，而不定积分则没有换限的问题.

其次，用换元法求定积分时，在新的变量下求出原函数后，不必再变换成原来的变量，只要把相应的积分限代入新变量的原函数中，并用上限的函数值减去下限的函数值即可．在

不定积分中求出新变量的原函数后，还必须把原函数变为原来变量的函数.

例如，求$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$和$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

令$x=\frac{1}{t}$，则$\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$. 当$x=\frac{1}{2}$时，$t=2$；当$x=\frac{3}{5}$时，$t=\frac{5}{3}$.

所以

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}=-\int_{2}^{\frac{5}{3}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}=\int_{\frac{5}{3}}^{2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$=\ln(t+\sqrt{t^2-1})\Big|_{\frac{5}{3}}^{2}=\ln(2+\sqrt{3})-\ln 3=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\ln 3}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}=-\ln[\frac{1}{x}+\sqrt{(\frac{1}{x})^2-1}]+C=\ln(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}})+C$$

习题 4-6

1．求由下列曲线所围图形的面积.

（1）$y=\frac{1}{x}$及直线$y=x$，$x=2$，$y=0$所围图形的面积；

（2）$y=\frac{x^2}{2}$分割$x^2+y^2\leqslant 8$成两部分图形的各自面积；

（3）$y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}^{-x}$与直线$x=1$所围图形的面积；

（4）$y=\ln x$，y轴与直线$y=\ln a$，$y=\ln b\ (b>a>0)$所围图形的面积.

2．求下列旋转体的体积.

（1）由曲线$y=x^2$和$x=y^2$所围成的图形绕y轴旋转后所得旋转体体积；

（2）由$y=x^3$，$x=2$，$y=0$所围成的图形，绕x轴及y轴旋转所得的两个不同的旋转体的体积.

3．在x轴上做直线运动的质点，在任意点x处所受的力为$F\left(x\right)=1-\mathrm{e}^{-x}$，试求质点从$x=0$运动到$x=1$处所做的功.

【数学技术与应用】

引发金融革命的金融数学

金融数学是从20世纪90年代起蓬勃发展的新兴边缘学科，在国际金融界和应用数学界受到高度重视. 1997年诺贝尔经济学奖授予斯坦福大学的金融荣誉教授麦伦·休斯与哈佛大学的经济学家罗伯·莫顿，就是为了奖励他们在期权定价等金融方面的贡献.

长期以来，由于金融市场的不确定性与高风险性，人们一直在探索利用各种因素正确评估资产风险和期权（或衍生证券）价格的有效方法. 金融数学模型的建立，对金融市场风险分析、预测与监控有着非常重要的作用. 20世纪50年代末至60年代初，哈里马科维茨的投资组合的均值——方差理论与夏普的资本资产定价理论，开创了金融数学理论的先

河，他们的理论引发了所谓的第一次“华尔街革命”．第二次“华尔街革命”于 1973 年提出衍生证券定价理论促成的．正是这两次“革命”构成了蓬勃发展的新学科——金融数学的主要内容，同时也是研究新型衍生证券设计的新学科——金融工程的理论基础．

在衍生证券定价理论中，最典型的是所谓欧式看涨期权的定价．通俗地说，期权就是一份合约，合约双方在 $t=0$ 时刻商定一个执行合约，规定双方在规定的时刻 t（到期日）以执行价格买入卖方的一份股票，但只有买方有优先权，即在 t 时刻买方认为价格不合适就可以放弃合约．显然，若该期权到期，则该期权的价值（亦即买方在 t 时刻获益）为股票市价与执行价格的差价的绝对值，这是一种只有到了 t 时刻才能确定其真正获益大小的随机变量，称为或有债权．一般情形的或有债权的一个重要用途就是帮助各类投资者在风险迭起的生产和贸易活动中进行套期保值，以回避风险，它也构成了金融工程的主要数学基础．

利用金融数学技巧获得的期权定价理论，已被推广到其他金融问题的研究之中，如期货、债权、可转换债权、利率到期外汇汇率等，并广泛应用于包括公司债券、可变利率抵押、抵押贷款、保险和税法在内的金融证券和合同的广阔领域．该理论和方法不仅适用于证券市场的资产定价，也适用于证券市场的风险分析．它的应用已受到各国政府的重视，而且取得了很好的实效．

现代的金融风险管理，都依赖着我们能用数学预测未来这个事实．当然，无法有百分之百的准确度，但已经准确到能让我们对钱要投资到哪里做出明智的决定了．本质上，我们提出购买保险或者股票时，我们真正处理的就是风险．金融市场底下的特质就是，冒的险愈大，可能获得的利润就愈大．利用数学并无法完全能够移除这个风险．但是，它可以告诉我们所冒的风险到底有多大，并帮助我们决定合理的代价．麦伦·休斯与罗伯·莫顿的贡献就在于此．

数学实验四　Mathematic 在定积分中的应用

【实验目的】

（1）加深理解积分理论中分割、近似、求和、取极限的思想方法；

（2）学习求积分的命令 Integrate 与 NIntegrate；

（3）了解 Mathematica 软件在积分运算中的重要作用．

【基本语句】

（1）Integrate[被积函数，自变量，积分区间]

功能：求被积函数在积分区间上的定积分值．

（2）NIntegrate[被积函数，自变量，积分区间]

功能：求被积函数在积分区间上的定积分的近似值．

【实验内容】

（1）计算函数在区间上的积分值和其近似值．

```
Clear[x];
Integrate[Exp[x],{x,a,b}] Π
Clear[x];
```

```
Integrate[Exp[x],{x,0,pi/4}]
NIntegrate[Exp[x],{x,0,pi/4}]
```

运行结果

```
-ea+eb
-1+e^(Π/4)
1. 19328
```

（2）计算平面曲线 $f(x)=\mathrm{e}^{-(x-2)^2\cos\pi x}$ 和 $g(x)=4\cos(x-2)$ 所围成的平面图形的面积 S，如图 4-28 所示.

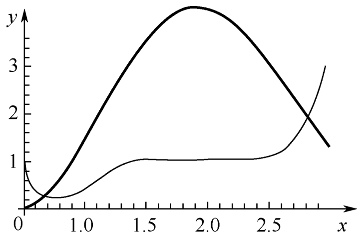


图 4-28

```
Clear[f,g]
f[x_]: =Exp[-(x-2)^3*Cos[Pi*x]];
g[x_]: =4Cos[x-2]^2;
Plot[{f[x],g[x]},{x,0.5,3},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0,1
]},
AxesStyle->Arrowheads[0.04],AxesLabel->{Style[x,15,Bold],Style[y,15,B
old]}]
FindRoot[f[x]==g[x],{x,1}]
FindRoot[f[x]==g[x],{x,3}]
NIntegrate[g[x]-f[x],{x,0.565936,2.85158}]
```

运行结果

```
{x->0.695936}
{x->2.85158}
3. 90305
```

第五模块　微分方程

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学.

——华罗庚

【本模块概述】本模块介绍微分方程的一些基本概念；讲述可分离变量的一阶微分方程和一阶线性微分方程的解法；最后讲述微分方程在电学、生物学、汽车工程等学科中的一些简单应用.

第一节　微分方程的发展与应用

1. 微分方程的发展

微分方程的起源约在 17 世纪末，为了解决物理及天文学问题而产生，大约和微积分的发展同期．荷兰数学家、天文学家、物理学家惠更斯在 1693 年的《教师报》中明确提出微分方程．雅各•伯努利是利用微积分求解常微分方程问题的先驱者之一，它在 1690 年发表的关于等时问题的解答中引入了微分方程 $\sqrt{b^2y-a^3}\,\mathrm{d}y=\sqrt{a^3}\,\mathrm{d}x$ ，1691 年给出了微积分方法建立悬链线问题的解答，建立微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{s}{c}$ ．莱布尼茨提出了求解 $y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f(x)g(y)$ 类型方程的变量分离法，还给出 $y'=f(\frac{y}{x})$ 的求解方法．1694 年，他还利用变量替换法给出了 $y'+p(x)y=Q(x)$ 的解．雅各•伯努利在 1695 年提出了伯努利方程 $\frac{dx}{dy}=p(x)y+Q(x)y^n$ 的解．莱布尼茨 1696 年给出证明：利用变量替换 $z=y^{1-n}$ ，可以把方程化为一解线性方程．约翰.伯努利首先提出了全微分方程的概念．欧拉在 1734—1735 年的论文中给出方程为全微分方程的条件，提出了积分因子的概念，确立了可采用积分因子求解的方程类型．求解一阶微分方程的所有初等方法的探讨工作于 1740 年基本完成.

二阶微分方程于 1691 年在物理问题的研究中首次提出．雅各•伯努利研究船帆在风力下的形状，引入二阶方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}=(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})^3$ ，其中 s 为弧长．1734 年，丹尼尔•伯努利解决了弹性横梁的横向位移问题 $\kappa^4\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}=y$ ．欧拉也发现了这个方程，又研究了线性常系数齐次微分方程 $0=Ay+B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+C\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\cdots+L\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ ，完整地解决了它的求解问题．10 年后欧拉又给出了常系数线性非齐次微分方程的解法，但是他采用的方法是逐次降低方程的阶数.

1700 年以后，利用级数求解微分方程的方法得到广泛应用．1750 年，欧拉将这种方法提到重要位置．1766 年，达朗贝尔指出，线性非齐次微分方程的通解等于它的特解与相应线性齐次微分方程的通解之和.

微分方程在 18 世纪中期成为一个独立学科，带动了许多学科的发展，其应用十分广泛，

许多物理或化学的基本定律都可以写成微分方程的形式，在天文学、生物学、地质学、经济学、考古学、控制论、社会学、弹道设计等领域中，微分方程可以作为许多复杂系统的数学模型．

2．微分方程的应用

（1）人口增长的预报模型[答案见本模块第四节]

问题提出 人口增长问题是当今世界上最受关注的问题之一．长期以来，人类的繁衍一直在自发地运行，但随着人口数量的迅速膨胀和环境质量的急剧恶化，人类才认识到研究人口数量的变化规律、如何进行人口控制等问题的必要性．在许多媒体上，我们都可以看到各种各样关于人口增长的预报，对比研究发现不同媒体对同一段时间里人口增长的预报会存在比较大的差异．那么，不同的预报方法各有什么特点？哪一种预报才是比较准确的呢？

（2）电路瞬态分析[答案见本模块第四节]

电路的旧稳态到新稳态的过渡过程，称为电路的瞬态过程，电路的瞬态分析需要常微分方程．

问题提出 设 RC 电路如图 5-1 所示，已知在开关 K 合上前电容 C 上没有电荷，电容 C 两端的电压为零，电源电压为 E．把开关合上，电源对电容 C 充电，电容 C 上的电压 u_{C} 逐渐升高，求电压 u_{C} 随时间 t 的变化规律．

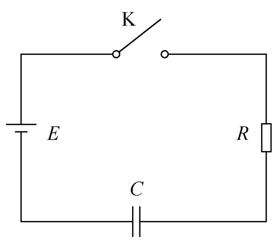


图 5-1

（3）汽车工程中的构件原理

汽车制造工业已有百年历史，发展到现如今已制造出快速、舒适、安全的汽车，就是因为大量运用许多数学知识解决了工程的技术难题．汽车生产厂家一般针对构件工作原理建立数学模型，例如运用积分求汽车的加速时间、应用微分解决 ABS（防抱死系统）问题、使用微分方程解决汽车操纵稳定性问题、通过微分方程分析汽车震动问题、运用模糊矩阵进行汽车故障诊断等．可以说，应用数学知识解决汽车工程中的问题一直伴随着汽车工业的发展历程．

问题提出 一般情况下，汽车灯的反射镜面是一旋转抛物面，试确定旋转抛物面的方程．[答案见本模块第四节]．

第二节　微分方程的基本概念

学习内容：微分方程的概念．

目的要求：理解微分方程、常微分方程，微分方程的阶，微分方程的解、通解、特解及微分方程的初始条件和微分方程的初值问题等概念，学会验证简单微分方程的解．

重点难点：微分方程的解、通解、特解，微分方程的初始条件、初值问题.

下面我们通过两个具体例题来说明微分方程的基本概念.

【引例 1】 一曲线通过点(1,2)，且在该曲线上任一点 $M(x,y)$处的切线的斜率为 $2x$，求该曲线的方程.

解　设所求的曲线方程为 $y=y(x)$，则根据导数的几何意义可知，未知函数 $y=y(x)$应满足下面的关系：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \tag{1}$$

且当 $x=1$ 时，$y=2$．即

$$y(1)=2 \tag{2}$$

对式（1）的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 两端积分，得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C \quad \text{（其中 C 是任意常数）} \tag{3}$$

将 y（1）=2 代入，得 $C=1$. 代入式（3），即得所求曲线方程

$$y=x^2+1 \tag{4}$$

【引例 2】 一质量为 m 的质点，从高 h 处，只受重力作用从静止状态自由下落，试求其运动方程.

解　在中学阶段就已经知道，从高度为 h 处下落的自由落体，离地面高度 s 的变化规律为 $s=h-\frac{1}{2}gt^2$，其中 g 为重力加速度．这个规律是怎么得到的呢？下面我们给出推导过程.

取质点下落的铅垂线为 s 轴，它与地面的交点为原点，并规定正向朝上．设质点在时刻 t 的位置为 $s(t)$．因为质点只受方向向下的重力的作用（空气阻力忽略不计），由牛顿第二定律 $F=ma$，得

$$m\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}=-mg$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}=-g \tag{5}$$

根据质点由静止状态自由下降的假设，初始速度为 0，所以 $s=s(t)$还应满足下列条件

$$s\big|_{t=0}=h\text{，}\quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0 \tag{6}$$

对式（5）两边积分，得

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1 \tag{7}$$

两边再积分，得

$$s(t)=\int(-gt+c_1)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{8}$$

其中，C_1，C_2 均为任意常数.

将条件（6）代入式（7）和（8），得 $C_1=0$，$C_2=h$．于是所求的运动方程为

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+h \tag{9}$$

上述两个例子的关系式（1）和（5）中，都含有未知函数的导数，它们都是微分方程.

定义 1 表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间关系的方程，叫做**微分方程**. 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为**微分方程的阶**.

例如，引例 1 的方程（1）是一阶微分方程；引例 2 的方程（5）是二阶微分方程.

定义 2 如果把一个函数及其导数代入微分方程后，能使微分方程成为恒等式，则称此函数为该**微分方程的解**.

例如，引例 1 中的方程（3）$y=x^2+C$ 和方程（4）$y=x^2+1$ 都是微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 的解；引例 2 中方程（8）$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 和方程（9）$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+h$ 都是微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}=-g$ 的解.

定义 3 如果微分方程的解中含有任意常数，且任意独立常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解.

例如，引例 1 的方程（1）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 是一阶微分方程，它的通解 $y=x^2+C$ 中含有一个任意常数；引例 2 的方程（5）$\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}=-g$ 是二阶微分方程，它的通解 $s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 中恰好含有两个独立的任意常数.

用以确定通解中任意常数的条件通常称为**初始条件**.

一阶微分方程的初始条件是指：

$$y(x_0)=y_0 \quad 或 \quad y\big|_{x=x_0}=y_0$$

二阶微分方程的初始条件是指：

$$y(x_0)=y_0，\ y'(x_0)=y_0' \quad 或 \quad y\big|_{x=x_0}=y_0 \ ,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0'$$

定义 4 满足初始条件的解成为微分方程的**特解**.

例如，引例 1 中方程 $y=x^2+1$ 就是微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解；引例 2 中 $s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+h$ 就是微分方程 $\frac{d^2s(t)}{dt^2}=-g$ 满足初始条件 $s(0)=h$，$s'(0)=0$ 的特解.

例题 1 验证：函数 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0$ 的通解.

解 首先，求所给函数的导数：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt=-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)$$

将 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 及 x 的表达式代入所给方程，得 $-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)=0$.

这表明函数 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 满足方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0$，因此它是所给方程的通解.

例题 2 验证：函数 $y=2\mathrm{e}^{x^2}$ 是微分方程 $y'=2xy$ 满足初始条件 $y(0)=2$ 的特解.

解　首先，求所给函数的导数：

$$y' = 2\mathrm{e}^{x^2}(x^2)' = 2\mathrm{e}^{x^2}2x = 2xy,$$

这表明函数 $y = 2\mathrm{e}^{x^2}$ 是 $y' = 2xy$ 的解. 又 $2\mathrm{e}^{0^2} = 2$，所以 $y = 2\mathrm{e}^{x^2}$ 是 $y' = 2xy$ 满足初始条件 $y(0) = 2$ 的特解.

习题 5-2

1．讨论下列微分方程的阶数.

（1） $x^2y' + y + 1 = 0$，_____阶　　（2） $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + 2\cos x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \sin y = 0$，_____阶

（3） $y'' + y\cdot y' + 4 = 0$，_____阶　　（4） $y = xy' + \dfrac{2}{3}(y')^{\frac{2}{3}}$，______阶

2．验证下列各题中的函数是否为所给微分方程的解.

（1） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y,\ \ y = C\mathrm{e}^x$

（2） $xy' = 2y,\ \ y = 5x^2$

（3） $y'' + y = 0,\ \ y = 3\sin x - 4\cos x$

（4） $y'' - 2y' + y = 0,\ \ y = x^2\mathrm{e}^x$

（5） $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0,\ \ y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$

3．确定满足所给初始条件的下列函数中的参数.

（1） $x^2 - y^2 = C,\ \ y\big|_{x=0} = 5$

（2） $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{2x},\ \ y\big|_{x=0} = 0,\ \ y'\big|_{x=0} = 1$

第三节　一阶微分方程

学习内容：一阶微分方程.

目的要求：理解一阶微分方程的概念，熟练掌握两种形式的一阶微分方程的解法及在电工学中的应用.

重点难点：一阶微分方程的概念，两种一阶微分方程的解法.

一阶微分方程的一般形式是：

$$F(x,y,y')=0 \quad \text{或} \quad y'=f(x,y)$$

本节主要介绍两种常见的一阶微分方程，分别是可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程.

一、可分离变量的微分方程

定义 1　形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\cdot g(y)$$

的微分方程称为可分离变量的微分方程.

求解方法　分离变量后化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

两边积分

$$\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$$

后就可求出通解．即

$\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$ 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\cdot g(y)$ 的通解.

例题 1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解　此方程是可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$$

两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x+C_1$$

得

$$\ln|y|=x^2+C_1$$

从而

$$y=\pm\mathrm{e}^{x^2+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}$$

又因为 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 仍是任意非零常数，把它记作 C，则有

$$y=C\mathrm{e}^{x^2}\quad（C\neq 0）$$

注意到 $y=0$ 也是原方程的解，所以 C 实际上也可以取零．这样就得到原方程的通解为 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$ （C 为任意常数）

从例题 1 解答的过程可以看出，以后凡遇到方程左端积分后是对数的形式，为使解法过程简洁起见，都可做如下简化处理．以上述例题 1 为例示范如下：

分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\ln y=x^2+\ln C$$

通解为

$$y=C\mathrm{e}^{x^2}$$

例题 2　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+x+y^2+xy^2$ 的通解．

解　原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+x)(1+y^2)$$

分离变量得

$$\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=(1+x)\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\int(1+x)\mathrm{d}x+C$$

即

$$\arctan y=\frac{1}{2}x^2+x+C$$

于是原方程的通解为

$$y=\tan(\frac{1}{2}x^2+x+C)$$

例题 3　求微分方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=1}=\mathrm{e}$ 的特解.

解　这是可分离变量的微分方程，分离变量得

$$\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

对上面等式两边积分

$$\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\ln C$$

得

$$\ln\ln y=\ln x+\ln C$$

去掉对数符号，得通解为

$$y=\mathrm{e}^{Cx}$$

将 $x=1,\ y=\mathrm{e}$ 代入通解中，得

$$\mathrm{e}=\mathrm{e}^{C}$$

所以 $C=1$.

所求特解为

$$y=\mathrm{e}^{x}$$

二、一阶线性微分方程

定义 2 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \text{ 或 } y'+P(x)y=Q(x)$$

的微分方程，称为**一阶线性微分方程**.

当$Q(x)\equiv 0$时，称为上式为**一阶线性齐次微分方程**，否则称为**一阶线性非齐次微分方程**. 一阶段线性微分方程的求解过程如下：

首先，求一阶线性齐次微分方程的通解.

一阶线性齐次微分方程 $y'+P(x)y=0$ 是可分离变量的微分方程. 分离变量，积分得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x\,,\ \ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C$$

由此得通解

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \quad (C\text{ 是任意常数})$$

其次，求一阶线性非齐次微分方程的通解.

将 $y'+P(x)y=Q(x)$ 变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=[\frac{Q(x)}{y}-P(x)]\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\ln y=\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x-\int P(x)\mathrm{d}x$$

因此

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

因为$\mathrm{e}^{\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x}$是 x 的函数，令 $u(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x}$，它也是一个待定的函数，这时上式变为

$$y=u(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

虽然我们没有求出一阶线性非齐次方程的解，但已经知道解的形式是它相应的一阶线性齐次方程的解 $\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 乘上一个待定函数 $u(x)$. 这种把对应齐次方程通解中的常数变换为待定函数的方法称为**常数变易法**.

例题 4 解方程 $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$.

解 这是一阶线性齐次微分方程，原式可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}(1+\ln\frac{y}{x})$$

令 $\frac{y}{x}=u$，则

$$y=ux\,,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

于是

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(1+\ln u)$$

分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

对上式两端积分得
$$\ln(\ln u)=\ln x+\ln C=\ln Cx$$

去掉对数符号，得
$$u=\mathrm{e}^{Cx}$$

故方程通解为
$$y=x\mathrm{e}^{Cx}$$

例题 5　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=2x\mathrm{e}^{-x^2}$ 的通解.

解　这是一阶线性非齐次微分方程，其中
$$P(x)=2x,\quad Q(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

首先，求与所给方程相对应的齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=0$ 的通解.分离变量，积分得
$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-2x\mathrm{d}x,\quad \ln y=-x^2+\ln C$$

由此可得通解
$$y=C\mathrm{e}^{-x^2}\ （C\text{ 是任意常数}）$$

其次，求所给非齐次微分方程的通解．设其通解具有如下形式：
$$y=u(x)\mathrm{e}^{-x^2}$$

求导，得
$$y'=u'(x)\mathrm{e}^{-x^2}-2xu(x)\mathrm{e}^{-x^2}$$

将 y 和 y' 的表达式代入方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=2x\mathrm{e}^{-x^2}$，可得
$$u'(x)\mathrm{e}^{-x^2}-2xu(x)\mathrm{e}^{-x^2}+2xu(x)\mathrm{e}^{-x^2}=2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

化简得
$$u'(x)=2x$$

两端积分得
$$u(x)=x^2+C$$

于是，原微分方程的通解是
$$y=(x^2+C)\mathrm{e}^{-x^2}$$

【衔接专业】　RL 串联电路分析

在串联电路中有电阻 $R=10\Omega$、电感 $L=2\mathrm{H}$ 和电源电动势 $E=20\sin 5t(\mathrm{V})$（见图 5-2），开关 S 闭合后，电路中有电流通过，求电路中电流强度 i 与时间 t 的函数关系.

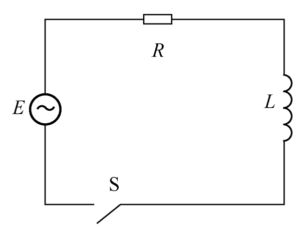


图 5-2

解　由电学知识可知，当电流 $i(t)$ 变化时，电阻 R 上的电压为 iR，电感 L 上的感应电动势为 $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

根据回路电压定律，可列出方程

$$iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 20\sin 5t$$

即

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{20}{L}\sin 5t$$

初始条件为 $i|_{t=0} = 0$，将 $R = 10\Omega$，$L = 2\mathrm{H}$ 代入方程，得

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 5i = 10\sin 5t$$

这是一个一阶非齐次线性微分方程，它的通解为

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{e}^{-\int 5\mathrm{d}t}[\int 10\sin 5t\mathrm{e}^{\int 5\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C] \\ &= \mathrm{e}^{-\int 5\mathrm{d}t}[\int 10\sin 5t\mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t + C] \\ &= \mathrm{e}^{-5x}[(\sin 5t - \cos 5t)\mathrm{e}^{5t} + C] \end{aligned}$$

将初始条件 $i|_{t=0} = 0$ 代入上式，得 C=1，则所求电流方程为

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{e}^{-5t} + \sin 5t - \cos 5t \\ &= \mathrm{e}^{-5t} + \sqrt{2}\sin(5t - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

这说明，当接通电路后，随着 t 的增大，上式第一项趋于零，电路中的电流由第二项决定，这是一个周期与电源电动势周期相同的周期函数.

习题 5-3

1．求方程 $(1+y^2)\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$ 的通解.

2．求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + yx^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

3．求方程 $x^2\mathrm{d}x + (x^3+5)\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

4．求方程 $(x+2y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

5．求微分方程 $3xy^2\mathrm{d}y = (2y^3 - x^3)\mathrm{d}x$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解.

6．求方程 $y'+3y=2$ 的通解.

第四节　应用实训

微分方程是数学的重要分支，用微分方程来刻画许多自然科学、经济科学甚至社会科学领域中的一些规律，这是微分方程应用的重要领域，也是其发展的动力．本节重点介绍利用微分方程来解决实际问题，即电路分析问题、生物生长预测问题、国民生产总值问题、游船上的传染病人数及犯罪嫌疑人的识别等方面的应用.

通过本节的学习，同学们可具备以下两方面的能力：熟练运算能力和综合运用所学知识去分析解决实际问题的能力.

应用微分方程解决实际问题的一般步骤为：

（1）分析问题，建立微分方程模型，找出相应的初始条件，这是最关键的一步；

（2）求出此微分方程的通解，根据初始条件确定所需的特解；

（3）根据问题的需要，用所得的解对实际问题做出解释.

一、在几何学中的应用

例题 1　一曲线通过点 $(2,3)$，且在两坐标轴间的任意切线段被切点平分，求此曲线方程.

解　（1）建立微分方程并确定初始条件.

设所求曲线方程为 $y=f(x)$，点 $P(x,y)$ 为切线上任意一点，按导数几何意义，过点 $P(x,y)$ 处作曲线的切线，则切线斜率为 $y'=f'(x)$，于是过点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

其中，(X,Y) 为切线上的动点坐标.

在切线方程中，令 $y=0$，得 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，即切线与 x 轴的交点为 $A\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$．由于点 P 平分线段 AB（B 为曲线与 y 轴交点)，所以点 P 的横坐标等于点 A 的横坐标之半，即有

$$x=\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{y'}\right)$$

由此，得到曲线 $y=f(x)$ 满足的微分方程

$$xy'+y=0 \qquad Y=0$$

依题意，得初始条件为 $y\big|_{x=2}=3$.

（2）解微分方程.

$xy'+y=0$ 是可分离变量的微分方程．分离变量、积分，得

$$\ln y=-\ln x+\ln C \text{ 或 } xy=C$$

将 $y\big|_{x=2}=3$ 代人上式通解中，有 $2\times3=C$，即 $C=6$，于是，所求曲线方程为 $y=\dfrac{6}{x}$.

由所得曲线方程知，这是等轴双曲线在第一象限内的分支.

二、在电学中的应用

例题 2　电路瞬态分析[见本模块第一节]

问题解决：

根据回路电压定律 $u_C + R_i = E$，电容充电时，电容上电量 Q 逐渐增加.

因为
$$Q = Cu_C\text{，}\quad i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Cu_C) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

所以
$$u_C + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E\text{，}\quad \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

$$\begin{aligned} u_C &= \mathrm{e}^{-\int\frac{1}{RC}\mathrm{d}t}\left(\int\frac{E}{RC}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{RC}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C_1\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\left(E\int\frac{1}{RC}\cdot\mathrm{e}^{\frac{t}{RC}}\mathrm{d}t + C_1\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\left(E\cdot\mathrm{e}^{\frac{t}{RC}} + C_1\right) \\ &= E + C_1\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

由初始条件 $u_C\big|_{t=0} = 0$，得 $0 = E + C_1$，$C_1 = -E$，于是 $u_C = E(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})$ 为充电器的充电规律函数.

三、在生物学中的应用

例题 3　人口增长预报[见本模块第一节]

问题解决：

认识人口的变化规律，建立合适的人口模型，才能做出比较准确的预报，问题中出现的预报的差异性，原因在于它们采用了不同的人口模型作为预测的依据．下面我们就采用几个不同的人口模型来解释这种现象.

为了得到人口预测模型，必须首先搞清楚影响人口增长的因素，而影响人口增长的因素很多，如人口的自然出生率、人口的自然死亡率、人口的迁移、自然灾害、战争等诸多因素．假如迁入率和迁出率对一个国家总量而言相对较小，以至于可以略去不计，那么，人口模型将变得更为简单.

英国人口统计学家马尔萨斯（1766—1834）在担任牧师期间，在教堂查看了 100 多年人口出生统计资料，发现人口出生率是一个常数，于是 1879 年在《人口原理》一书中提出了闻名于世的马尔萨斯人口模型，它的基本假设是：

在人口自然增长过程中，净相对增长（出生率与死亡率之差）是常数，即单位时间内人口的增长量与人口总数成正比，比例系数设为 r. 在此假设下，推导并求解人口随时间变化的数学模型.

设时刻 t 的人口为 $N(t)$，把 $N(t)$ 当作连续、可微函数处理（因人口总数很大，可近似这样处理，此乃离散变量的连续化处理），根据马尔萨斯的假设，在 t 到 $t+\Delta t$ 时间段内，人口的增长量为

$$N(t+\Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t$$

设 t_0 时刻的人口为 N_0，于是

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

这就是马尔萨斯人口模型，用分离变量法易求出其解为

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{r(t-t_0)}$$

这表明人口以指数规律随时间无限增长.

模型检验：据估计 1961 年地球上人口总数为3.06×10^9，而在以后的 7 年当中，人口总数以每年 2%的速度增长，将$t_0 = 1961$，$N_0 = 3.06\times10^9$，$r = 0.02$代入上式得

$$N(t) = 3.06\times10^9\,\mathrm{e}^{0.02(t-1961)}$$

这个公式非常准确地反映了在 1700—1961 间世界人口总数，因为这期间地球上的人口大约每 35 年翻一番，而上式断定 34.6 年增加一倍.

但是，之后人们以美国人口为例，用马尔萨斯模型计算的结果与人口资料比较，却发现有很大的差异，尤其是在用此模型预测较遥远的未来地球人口总数时，发现令人不可思议的问题. 如果按此模型计算，到 2670 年，地球上将有 36000 亿人口，如果地球表面全是陆地（事实上，地球表面还有 80%被水覆盖），我们也只得互相踩着肩膀站成两层了，这是非常可怕的.

马尔萨斯模型为什么不能预测未来的人口呢？这主要是地球上的各种资源只能供一定数量的人生活，随着人口的增加，自然资源环境条件等因素对人口增长的限制作用越来越显著. 如果当人口较少时，人口的自然增长率可以看作常数；那么，当人口增加到一定数量之后，这个增长率就随人口的增加而减少. 因此，应对马尔萨斯模型中关于净增长率为常数的假设进行修改.

1838 年，荷兰生物学家威尔侯斯特（Verhulst）引入常数N_{m}，用来表示自然环境条件下所能容许的最大人口数（一般来说，一个国家工业程度越高，它的生活空间就越大，食物就越多，从而N_{m}就越大），并假设净增长率等于$r(1-\dfrac{N(t)}{N_{\mathrm{m}}})$，即净增长率随着$N(t)$的增加而减少，当$N(t)\to N_{\mathrm{m}}$时，净增长率趋于零. 按此假设建立人口预测模型.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r(1-\dfrac{N}{N_{\mathrm{m}}})N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

这就是 Logistic 模型，也是可分离变量的微分方程，其解为

$$N(t) = \frac{N_{\mathrm{m}}}{1+(\dfrac{N_{\mathrm{m}}}{N_0}-1)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}}$$

模型分析：

（1）当$t\to\infty$时，$N(t)\to N_{\mathrm{m}}$，即无论人口的初值如何，人口总数趋向于极限值N_{m}；

（2）当$0<N<N_{\mathrm{m}}$时，$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r(1-\dfrac{N}{N_{\mathrm{m}}})N > 0$，这说明$N(t)$是时间$t$的单调递增函数；

（3）由于$\dfrac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2} = r^2(1-\dfrac{N}{N_{\mathrm{m}}})(1-\dfrac{2N}{N_{\mathrm{m}}})N$，所以当$N<\dfrac{N_{\mathrm{m}}}{2}$时，$\dfrac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2}>0$，$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$单调递增；

当$N>\frac{N_m}{2}$时，$\frac{d^2N}{dt^2}<0$，$\frac{dN}{dt}$单调递减，即人口增长率由增变减，在N_m/处人口增长率最大，也就是说在人口总数达到极限值一半以前是加速生长期，过这一点后，生长的速率逐渐变小，并且会逐渐达到零，这是减速生长期.

（4）用该模型检验美国从 1790 年到 1950 年的人口，发现模型计算的结果与实际人口在 1930 年以前非常吻合，自从 1930 年以后，误差越来越大，一个明显的原因是在 20 世纪 60 年代美国的实际人口总数已经突破了 20 世纪初所设的极限人口．由此可见，该模型的缺点之一是N_m不易确定．事实上，随着一个国家的经济腾飞，它所拥有的食物就越丰富，N_m的值就越大.

（5）用 Logistic 模型来预测世界未来人口总数．某生物学家估计，$r=0.029$，当人口总数为3.06×10^9时，人口以每年 2% 的速度增长，由逻辑模型得

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dt}=(1-\frac{N}{N_m})$$

即

$$0.02=0.029(1-\frac{3.06\times10^9}{N_m})$$

从而得到$N_m=9.86\times10^9$，即世界人口总数极限值为近 100 亿.

需要说明的是：人也是一种生物，因此，上面关于人口问题的讨论，原则上也可以用于在自然环境下生存着的单一物种，如森林中的树木、池塘中的鱼等，Logistic 模型有着广泛的应用.

综述：作为短期预测，两个模型不相上下，但用马尔萨斯模型要简单得多，作为中长期预测，Logistic 模型显然更为合理.

四、汽车工程中的构件原理

例题 4　汽车车灯问题[见本模块第一节]

问题解决　如图 5-3 所示，设旋转轴为Ox轴，光源在原点$(0,0)$处，抛物线$L:y=y(x)$，$M(x,y)$为L上的任一点，MT为切线，斜率为y'，法线MN交Ox轴于N，斜率为$-\frac{1}{y'}$.

因为$\angle OMN=\angle NMS$，所以$\tan\angle OMN=\tan\angle NMS$，由夹角的正切公式得

$$\tan\angle OMN=\frac{-\frac{1}{y'}-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{xy'}},\quad \tan\angle NMS=\frac{1}{y'}$$

化简得微分方程$yy'+2xy'-y=0$，即

$$y'=-\frac{x}{y}\pm\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}$$

该微分方程的通解为$y^2=2C(x+\frac{C}{2})$（C为任意常数），所求以Ox轴为旋转轴的方程为

$$y^2+z^2=2C(x+\frac{C}{2})$$

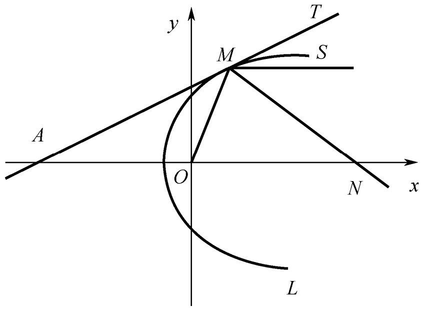


图 5-3

说明：按照该数学模型精确设计产品，在保障构件材质的情况下，生产出的产品是安全可靠的.

五、生产总值问题

例 5　1999 年我国的国民生产总值（GDP）为 80423 亿元，如果能保持每年 8%的相对增长率，那么到 2014 年我国的国民生产总值是多少？

解　以 t=0 代表 1999 年，设第 t 年我国的国民生产总值为 $P(t)$，由相对增长率为 8%，则

$$\frac{P'(t)}{P(t)}=\frac{\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}}{P(t)}=8\%$$

分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)}=8\%\mathrm{d}t$$

两边积分得
$$\int\frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)}=\int 8\%\mathrm{d}t$$

得
$$\ln P(t)=0.08\mathrm{d}t+\ln C$$

将初始条件 $P\big|_{t=0}=80423$ 代入得 C=80423.

所以从 1999 年起我国的国民生产总值为 $P(t)=80423\mathrm{e}^{0.08t}$，将 t=2014−1999=15 代入上式，就得 2014 年我国国民生产总值为

$$P(15)=80423\mathrm{e}^{0.08\times 15}\approx 267014\text{ 亿元}$$

六、传染人数问题

问题提出　一只游船上 800 人，一名游客患了某种传染病，12h 后有 3 人发病，由于这种传染病没有早期症状，故感染者不能被及时隔离，直升机将在 60 至 72h 间将疫苗运到，试估算疫苗运到时患此传染病的人数.

问题分析　设 $y(t)$ 表示发现首例病人后 t 时间（单位为 h）的感染人数，则 $800-y(t)$ 表示此时刻未受感染的人数，由题意知 $y(0)=1$， $y(12)=3$.

当感染人数 $y(t)$ 很小时，传染病的传播速度较慢，因为只有很少的游客能接触到感染者；当感染人数 $y(t)$ 很大时，未受感染的人数 $800-y(t)$ 很小，即只有很少的游客能被传染，所以此时传染病的传播速度也很慢．排除上述两种极端的情况，当有很多的感染者及很多的未感染者时，传染病的传播速度很快．因此传染病的发病率一方面受到感染人数的影响，

另一方面也受未感染人数的制约.

问题解决 根据以上分析，可建立如下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky(800-y)\text{（}k\text{ 为比例常数）}$$

通解为
$$y(t)=\frac{800}{1+C\mathrm{e}^{-800kt}}$$

因为 $y(0)=1$，所以 $1=\dfrac{800}{1+C}$，解得 $C=799$.

因为 $y(12)=3$，故

$$3=\frac{800}{1+799^{-800k\times 12}}$$

由

$$\mathrm{e}^{12\times 800k}=\frac{\dfrac{800}{3}-1}{799}=\frac{797}{799\times 3}$$

得
$$800k=\frac{1}{12}\ln\frac{797}{799\times 3}\approx 0.09176$$

所以
$$y(t)=\frac{800}{1+799\mathrm{e}^{-0.09176t}}$$

$$y(60)\approx 188 \qquad y(72)\approx 385$$

从上面的数字可以看出，在 72h 疫苗被运到时感染者的人数将是在 60h 时感染者人数的两倍，可见在传染病流行时及时采取措施是至关重要的.

七、嫌疑犯识别问题

问题提出 受害者的尸体于晚上 $19:30$ 被发现. 法医于晚上 $20:20$ 赶到凶案现场，测的尸体温度为 32.6℃；一小时后，当尸体即将被抬走时，测的尸体温度为 31.4℃，室温在几个小时内始终保持在 21.1℃. 此案最大的嫌疑犯是张某，但张某声称自己是无罪的，并有证人说："下午张某一直在办公室上班，$17:00$ 时打了一个电话，打完电活就离开了办公室." 从张某的办公室到受害者家（凶案现场）步行需 5min，现在的问题是：张某不在凶案现场的证词能否使他被排除在嫌疑犯之外？

问题解决 设 $T(t)$ 表示 t 时刻尸体的温度，并记晚上 20:20 时刻为 $t=0$，则

$$T(0)=32.6\text{℃} \qquad T(1)=31.4\text{℃}$$

假设受害者死亡时的体温是正常的，即 $T(t)=37$℃，要确定受害者的死亡时刻，也就是求 $T(t)=37$℃ 的时刻 T_{d}，如果此时张某在办公室，则他可被排除在嫌疑犯之外，否则张某不能被排除在嫌疑犯之外.

人体体温受大脑神经中枢调节，人死后体温调节功能消失，尸体的温度受外界环境温度的影响. 假设尸体温度的变化率服从牛顿冷却定律，即尸体温度的变化率正比于尸体温度与室温的差，即

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-21.1)\text{，（}k\text{ 为常数）}$$

微分方程的通解为

$$T(t)=21.1+a\mathrm{e}^{-kt}$$

因为$T(0)=21.1+a\mathrm{e}^{-k\times 0}=32.6$，所以$a=11.5$.

又因为$T(1)=21.1+11.5\mathrm{e}^{k\times 1}=31.4$，所以$\mathrm{e}^{k}=\dfrac{115}{103}$.

故$k=\ln 115-\ln 103=0.110$，于是

$$T(t)=21.1+11.5\mathrm{e}^{-0.110\times t}$$

当$T(t)=37$℃时，有$21.1+11.5\mathrm{e}^{-0.110\times t}=37$，所以$t\approx -2.95\mathrm{h}\approx -2\mathrm{h}57\,\mathrm{min}$.

故

$$T_{\mathrm{d}}=8\mathrm{h}20\,\mathrm{min}-2\mathrm{h}57\,\mathrm{min}=5\mathrm{h}23\,\mathrm{min}$$

即死亡时间大约在下午$17:23$，因此张某不能排除在嫌疑犯之外.

第五节　释疑问答

问题 1 微分方程与其他方程有什么不同？

通常把表达未知量必须满足某种条件的含有未知量的等式称为方程．方程一般按对未知量施加的运算进行分类．例如

$$x^3+3x-1=0\text{，}\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}=1$$

方程中对x施加了代数运算，故称为代数方程．又如

$$\sin 2x+\cos 3x=1\text{，}\quad \mathrm{e}^{x}=x^2-1$$

方程中含有超越函数，故称之为超越方程．再如

$$y''+2y'+3y=\mathrm{e}^{x}\qquad y'''+2y''-y'+y=\sin x+1$$

方程对未知函数y施加了导数（微分）运算，故称之为微分方程．一个微分方程的解一般有无穷多个．若未知函数仅与一个自变量有关，则方程称为常微分方程；若未知函数与两个或两个以上变量有关，则方程称为偏微分方程．微分方程的解又分为通解、特解与奇解，这是与其他方程不同的．

问题 2　何谓微分方程的解和隐式解？

如果函数$y=\varphi(x)$代入常微分方程后能使方程成为恒等式,则称函数$y=\varphi(x)$为该方程的解．如果关系式$\phi(x,y)=0$确定的隐函数是微分方程的解，则称$\phi(x,y)=0$为该方程的隐式解．

问题 3　微分方程的通解与特解有什么区别？

如果常微分方程的解中含有任意常数，且任意常数（互相独立）的个数等于微分方程的阶数（即未知函数最高阶导数的阶数），这种解成为方程的通解．从通解中确定出所有任意常数后得到的解称为特解．在几何上，通解表示积分簇曲线，而特解表示一条特定的积分曲线．例如，一阶微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$的通解$y=\varphi(x,C)$（其中$C$为任意常数）在$XOY$平面上为一簇曲线，称为积分曲线族；满足初始条件$y(x_0)=y_0$的特解，其图形就是过点$(x_0,y_0)$的一条积分曲线．

问题 4　微分方程的通解是否是微分方程的全部解？是否每个微分方程都存在通解？

微分方程的解并不是除了通解就是特解，还有一类解就是奇解，奇解的曲线是与通解的所有积分曲线相切，一般高等数学教材对奇解不做讨论，有兴趣的同学不妨查阅相关的书籍进行了解，因而，微分方程的通解不一定包含了微分方程的所有解.

问题 5　用分离变量法求解微分方程是否会产生“失解”或“增解”呢？

有可能.

例如，$x^2\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}x=0$ 是可分离变量的微分方程，分离变量得

$$-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

事实上，这里“默认”（即假定）了 $x\neq 0$，$y\neq 0$，积分的通解为

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+C \qquad ①$$

但 $x=0$，$y=0$ 也是原方程的解，我们不可能从通解①中找到它们．找回它的办法是注意在分离变量的过程中是否使微分方程的解集发生了变化，如果解集缩小了，则要检查失去的部分是不是原方程的解，尤其对初值问题的求解更应检查丢失的解是否适合方程和初值条件，这样初值问题的答案就更完整了.

通解①可以进一步整理为

$$x=y+Cxy \qquad ②$$

检验②，我们发现它也是原方程的通解，而且还包含了 $x=0$，$y=0$，这也说明为什么在求微分方程过程时，经常对通解做变形.

高等数学课程对于微分方程求通解的基本要求，只需求出通解就可以了，也就是说，如果所给问题只要求求微分方程的通解，那么，就不必过分考虑“失解”的现象.

在解微分方程过程中也可能有“增解”现象，例如，求解初值问题 $yy'+x=0$ 且 $y(0)=1$. 将微分方程分离变量后有 $y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$，积分得 $x^2+y^2=C$.

由 $y(0)=1$，所以 $C=1$，故得初值问题的解为

$$x^2+y^2=1\text{，即 } y=\pm\sqrt{1-x^2} \qquad ③$$

但是，初值问题的解实际上只是③中的部分 $y=\sqrt{1-x^2}$，也就是说，③中含有增解：

$$y=-\sqrt{1-x^2}$$

严格地讲，“增解”理应舍去，然而，有时舍去“增解”需要较高的数学技巧，所以高等数学课程中对含有“增解”的等式 $\phi(x,y)=0$（只要微分方程的真正解包含于 $\phi(x,y)=0$ 中），仍把 $\phi(x,y)=0$ 称为微分方程的解；另一原因是实际问题常求特解，由初始条件只定一个解，其他解就一起舍去了.

问题 6　求微分方程的通解时，如何添加任意常数？

积分运算结束后立即添加任意常数；被积函数为对数函数时，要考虑到函数可能小于零的情况，注意对真数加绝对值号；注意常数表示的灵活性，若被积函数为对数函数，将常数也表示为对数形式，有利于化简.

例如，求 $y^1=2x(1+y)$.

解　将方程分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y}=2x\mathrm{d}x\text{，}\quad y\neq -1$$

错误解法 1：$\ln|1+y| = x^2 + C$

原方程的通解为　$1+y = \mathrm{e}^{x^2+C}$，即 $y = Ce^{x^2} - 1$.

其错误在于：（1）积分时对数的真数没有加绝对值号，（2）$1+y = \mathrm{e}^{x^2+C}$ 与 $y = C\mathrm{e}^{x^2} - 1$ 中的常数 C 的含义不同，不能用同一个字母表示.

错误解法 2：$\ln|1+y| = x^2$.

所求通解为$1+y=\pm\mathrm{e}^{x^2}+C$.

错误在于完成积分后没有及时添加常数，而是放在最后一步才添加.

正确解法是：

$$\ln|1+y| = x^2 + C_1$$

$$|1+y| = \mathrm{e}^{x^2+C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}，\ 1+y = \pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}$$

令 $C = \pm\mathrm{e}^{C_1}$，原方程通解为

$$y = C\mathrm{e}^{x^2} - 1$$

再例如，求微分方程$1+y^2 - xyy' = 0$ 的通解.

解　原方程为可分离变量的方程，分离变量得

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

两端积分，得 $2\ln|x| = \ln\left|1+y^2\right| + \ln|C|$（注意此处的常数表示为$\ln|C|$），故所求通解为

$$\frac{x^2}{1+y^2} = C$$

问题 7　怎样理解常数变易法?

常数变易法基于这样一种想法而产生的：当求得线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的通解为 $y = c\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 时，我们自然会考虑线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = Q(x)$ 的通解形式. 鉴于非齐次方程与齐次方程的等式左边完全一致，仅右边有所不同，一个是函数$Q(x)$，一个是数零. 因此，通解形式也应该相似，从而设想用$u(x)$ 来代换常数 C 的方法就是常数变易法，它在二阶线性非齐次微分方程求解中也有应用.

问题 8　为什么一阶非齐次线性微分方程可用常数变易法求出其通解?

常数变易法实际上是做了一个未知函数的变换，设 $y = u(x)\cdot v(x)$，其中 $v(x)$ 是新的未知函数，$u(x)$ 是待定函数，代入一阶非齐次线性微分方程 $y' + p(x)y = Q(x)$ 中，得

$$v'(x)\cdot u(x) + v(x)\cdot[u'(x) + p(x)u'(x)] = Q(x)$$

因为$u(x)$ 是待定函数，任一个可导函数 $u(x)$ 都可对方程做变换，但我们做变换的宗旨希望简化运算，因而在此可以考虑选取 $u(x)$ 恰好使得 $u'(x) + p(x)u'(x) = 0$，则方程经变化简化为 $v'(x)\cdot u(x) = Q(x)$，这样就可以很容易地求出 $v(x)$，知道了 $u(x)$ 后，就求出原方程的解.

而 $u'(x) + p(x)u'(x) = 0$ 恰好为相应的齐次方程，所以 $u(x)$ 可取为它的解 $\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$，也就可以很容易地求出 $v(x)$. 因此要将 $y = v(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 与相应齐次方程的通解相比较，就像将对应齐次方程通解中的任意常数换成函数，因而也就将这种方法称为常数变易法，用常数变易法可求出一阶非齐次线性微分方程的通解.

习题 5-5

1．设一机械设备在任意时刻t以常数比率贬值.若设备全新时价值为 10000 元，5 年末价值为 6000 元，求该设备在出厂 20 年末的价值.

2．如果国民生产总值每年的递增率是10%．问多少年后国民生产总值翻两番？

3．若净利润L是广告费x的函数，并且它们之间的关系满足方程$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=k-a(L+x)$，其中$a$，$k$为常数．设初始条件$L(0)=L_0$，求$L(x)$．

【数学科学】

与数学有关的边缘学科

随着数学本身的发展，数学与科学技术相结合，产生了许多边缘学科.

（一）生物数学

人们在研究复杂的生命现象时，也需要进行大量的运算，电子计算机出现后，许多生物学问题的求解成为可能，因而产生了生物数学．现在生物学发展得很快，出现了许多分支．例如，用统计方法研究生物界的随机现象，为生物学提供分析处理观察资料的方法的生物统计学；用概率论的方法研究各种不同情况下生物群体内基因型变化的群体遗传学；用数学方法研究自然界中的生态系统，建立生态模型，进行生态分析与生态模拟等.

如，微分方程及在生物学中的应用国际研讨会于 1997 年 7 月 25 日-27 日在加拿大召开．这次会议主要为加拿大两著名生物学家的退休而举行．参加会议的有 30 多个国家的 80 名数学与生物学工作者.会议的主要议题就是介绍微分方程在生物学中的应用发展动向.

数学模型能定量地描述生命物质运动的过程，一个复杂的生物学问题借助数学模型能转变成一个数学问题，通过对数学模型的逻辑推理、求解和运算，就能够获得客观事物的相关结论，达到对生命现象进行研究的目的．比如描述生物种群增长的费尔许尔斯特–波尔方程，就能够比较正确地表示种群增长的规律；描述捕食与被捕食两个种群相克关系的洛特卡–沃尔泰拉方程从理论上说明，滥用农药在毒杀害虫的同时也杀死了害虫的天敌，从而常常导致虫害更猖狂地发生等．还有一类更一般的方程类型，称为反应扩散方程数学模型，也在生物学中广泛应用，它与生理学、生态学、群体遗传学、医学中的流行病学和药理学等研究有较密切的关系.

（二）数学地质学

20 世纪 60 年代以来，随着地质学的发展和电子计算机的应用，逐渐出现了用数学理论和方法研究各种地质现象的数量关系和空间形式的数学地质学．它用数学模型模拟地质

现象，用电子计算机进行复杂运算，来研究各种复杂的地质过程．数学地质学已广泛地应用于沉积学、地层学、构造地质学、矿床学、水文地质学、工程地质学等方面．数学地质学的发展引起导质学从定性向定量的变革．

（三）数理逻辑学

数学与逻辑学相互渗透，产生了数理逻辑这一新学科．它是以数学理论的形式结构、数学计算、数学推理为对象，研究它们的方法和规律，并用数学方法研究思维过程中所遵循的逻辑规律，系统地研究数学中的逻辑方法．

数学逻辑采用数学方法，系统地使用符号、公式来陈述和处理问题，对理论中的概念做出严格的定义，对定理做出严格的证明等．用数理逻辑研究某些数学理论中的命题并给予证明，为数学提供了新的研究方法，对数学发展有很大影响．

（四）计算数学

围绕电子计算机的发展和应用，又产生了计算数学．计算数学是利用现代化计算技术解决具体问题的数学方法．计算数学的内容包括：

（1）数值计算方法．这是把具体问题数学化，建立一个反映问题本质的数学模型，列出方程和列出解题的步骤，制定数值计算方法，让计算机自动解题．

（2）程序设计和程序自动化．拟定解题的计算方法，并把它编成计算机工作步骤的程序单，计算机按规定的步骤来解题．为了提高解题准备的工作效率，主要采用程序标准化和程序自动化．

数学实验五　Mathematic 在微分方程中的应用

【实验目的】

掌握 Mathematica 求解微分方程通解的方法．

【基本语句】

1．DSolve[equ==0, y[x],x]

功能：求常微分方程的通解．

2．DSolve[{equ==0, 初始条件}, y[x],x]

功能：求常微分方程满足初始条件的特解．

3．DSolve[{equ1==0,equ2==0},{y1[x],y2[x]},x]

功能：求常微分方程组满足初始条件的特解．

4．DSolve[{equ1==0,equ2==0, 初始条件},{y1[x],y2[x]},x]

功能：求常微分方程组满足初始条件的特解．

5．NDSolve[equ==0, y[x],x]

功能：求常微分方程所有跟的近似形式．

6．NDSolve[{equ1==0,equ2==0},{y1[x],y2[x]},x]

功能：求常微分方程组所有根的近似形式．

【实验内容】

1．求常微分方程的通解

（1）求一阶微分方程 $y'+y+xy^2=0$ 的通解.

Mathematica 语句：

```
DSolve[y´[x]+y[x]+x*y[x]^2==0,y[x],x]
```

运行结果

```
{{y[t]->-1/(1+x-e^xC[1]}}
```

（2）求二阶微分方程 $x^2y''+y=0$ 的通解.

Mathematica 语句：

```
DSolve[x^2y″[x]+y[x]==0,y[x],x]
```

运行结果

$\{\{y[x]->\sqrt{x}\,C[1]\cos[\,(\sqrt{3}\log[x])/2]+\sqrt{x}\,C[2]\sin[(\sqrt{3}\log[x])/2]\}\}$

2．求方程 $y''-y'=x$ 满足 y（0）=0，y'（0）=1 的特解.

Mathematica 语句：

```
DSolve[{D[y[x],{x,2}]-D[y[x],x]==x,y[0]==0,y′[0]==0},y[x],x]
```

或者，

```
Dsolve[{y″[x]-y′[x]==x,y[0]==0, y′[0]==0}, y[x],x]
```

运行结果：

```
{{y[x]->(-2+2e^x-x^2)/2}}
```

3．求微分方程 $y'=x+y$，$y(0)=1$ 在区间[0,1]内的数值解.

Mathematica 语句：

```
Sl=NDSolve[{y′[x]==x+y[x],y[0]==1},y,{x,0,1}]
```

运行结果

```
{{y->InterpolatingFunction[{0.,1.}, ◇]}}
```

上面显示的是所求数值解的替换形式，为得到本问题的数值解，再输入如下 Mathematica 语句：

```
Plot[Evaluate[y[x]/.Sl],{x,0,1},AxesStyle->Arrowheads[0.04],AxesLabl->{Style[x,15,Bold],Style[y,15,Bold]}]
```

运行结果如图 5-4 所示.

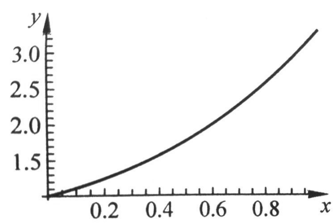


图 5-4

第六模块　线性代数

一门学科，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步.

——卡尔 · 马克思（1818—1883）

【本模块概述】

本模块主要介绍线性代数的发展与应用、行列式的概念、行列式的性质、行列式的计算、矩阵的概念与计算、矩阵的初等百年换与矩阵的秩、逆矩阵、线性方程组的解法、线性方程组的判定等内容，学习时应理解相关概念，掌握线性方程组在计算机技术、电学、经济学等方面的应用.

第一节　线性代数的发展与应用

一、线性代数的发展

线性代数是代数的一门重要学科，那什么是代数呢？代数英文是 Algebrd，源于阿拉伯语．其本意是“结合在一起”．也就是说代数的功能是把许多看似不相关的事物“结合在一起”，也就是进行抽象．抽象的目的不是为了显示谁的智商高，而是为了解决问题的方便，为了提高效率，把一些看似不相关的问题划归为一类问题.

线性代数属于近代数学，“线性”一词源于平面解析几何中一次方程是直线方程，在这里意指数学变量之间的关系是以一次形式来表达的．线性代数起源于处理线性关系问题，它是代数学的一个分支，虽形成于 20 世纪，但历史却非常久远，部分内容在东汉初年成书的《九章算术》里已有雏形论述．在 18～19 世纪期间，随着研究线性方程组和变量线性变换问题的深入，先后产生了行列式和矩阵的概念，为处理线性问题提供了强有力的理论工具，并推动了线性代数的发展.

线性代数中的一个重要概念是线性空间（对所谓的“加法”和“数乘”满足 8 条公理的集合），而其元素称为向量．也就是说，只要满足几条公理，我们就可以对一个集合进行线性化处理，可以把一个不太明白的结构用已经熟知的线性代数理论来处理.

如果我们能够把它用在生活当中，那么，我们的生活将是高效率的．下面介绍线性代数的具体应用．线性代数研究最多的就是矩阵了，矩阵又是什么呢？矩阵就是数表，而这个数表可以进行交换，以形成新的数表．也就是说，如果你抽象出某种变化规律，形成数表，你就可以用代数的理论对你所研究的数表进行变换，并得出你所想要的一些结论.

另外，进一步的学科有运筹学．运筹学的一个重要议题是线性规划，而线性规划要用到大量的线性代数的知识．如果掌握了线性代数与线性规划，那么你就可以将实际生活中的大量问题抽象为线性规划问题，以得到最优解．如：若你是一家商店的老板，你可以合理安排各种商品的进货，以达到最大利润；若你是一个大家庭中的一员，你又可以用规划的办法来使你们的家庭预算达到最小．军事领域仍然是运筹学应用的一个重点，诸如军队的后勤供给、作战方案的管理等，美国在海湾战争中成功的后勤管理充分说明了这种技术的效率性．无论是在企业的发展计划、营销策略，还是物料管理、生产过程、质量控制中

都涉及运筹学问题，这些都是运筹学实际应用的经典案例.

在计算机广泛应用的今天，计算机图形学、计算机辅助设计、密码编译、虚拟现实、通信网络的控制、电力系统的稳定高效等技术无不以线性代数为其理论和算法基础的一部分. 随着科学的发展，我们不仅要研究单个变量之间的关系，还要进一步研究多个变量之间的关系，各种实际问题在大多数情况下可以线性化，而由于计算机的发展，线性化的问题又可以计算出来，线性代数正是解决这些问题的有力工具.

二、线性代数的应用

1. 电路网络问题线性方程组与矩阵的应用[答案见第十二节]

工程实践中的电路大多很复杂，这些电路是由电器元件按照一定方式连接而成的电路网络. 在电路中，含有元件的导线称为支路，而三条或三条以上支路的连接点称为电路节点. 电路网络分析，简略地说，就是求出电路网络上各支路上的电流和电压. 电路网络的数学模型通常用线性方程组或微分方程组等来描述. 对稳态直流电路网络的分析，一般用基尔霍夫定律来解决.

问题提出　现在有如图 6-1 所示的直流电路网络（见本模块第十二节）. 假设各支路上的电阻都是 5Ω，在支路 1 上接入了 20V 的直流电源. 试确定各支路上的电流与电压降.

2. 行业就业人数预测模型矩阵对角化的应用[答案见第 12 节]

社会就是一个大家庭，三百六十行必须协调发展，因此各行各业就业人数有一定的饱和量，因此，一个地区的人才引进与培养都需要有合理的计划.

问题提出　一中小城市的市区及郊区共有 30 万人从事农、工、商的工作，假定这个总人数在若干年内保持不变，而社会调查表明：

① 在这 30 万就业人员中，目前约有 15 万人从事农业，9 万人从事工业，6 万人经商.

② 在务农人员中，每年约有 20%改为务工，10%改为经商；

③ 在务工人员中，每年约有 20%改为务农，10%改为经商；

④ 在经商人员中，每年约有 10%改为务农，10%改为务工.

预测一年后从事各行业人员的人数，以及经过多年之后，从事各行业人员总数的发展趋势.

第二节　行列式的概念

学习内容：二阶行列式、三阶行列式、n 阶行列式、特殊行列式的概念以及计算.

目的要求：理解行列式相关概念，熟练掌握二阶、三阶行列式、n 阶行列式的计算.

重点难点：行列式相关概念的理解，n 阶行列式、特殊行列式的计算.

【引例】 行列式的研究起源于对线性方程组的研究. 在中学阶段我们学习过用代入消元法和加减消元法解二元一次方程组和三元一次方程组.

例如：用消元法解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

解　由 $a_{22}\times(1)-a_{12}\times(2)$，消去未知量 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

由 $a_{11}\times(2)-a_{21}\times(1)$，消去未知量 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得原方程组的唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆，我们引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

类似地，也可将解中的另外两个代数和用这种记号表示出来，即

$$D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

于是，当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，原方程组的解就可表示为

$$x=\frac{D_x}{D},\quad x=\frac{D_y}{D}$$

一、二阶行列式

1．二阶行列式定义

形如记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 式子称为**二阶行列式**，它是由两行两列 4 个数排列而成的数表，横排称为**行**，竖排称为**列**，数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列．$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的展开式，展开式中项的个数为 2！．于是得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

二阶行列式展开可以按照下列对角线法则来记忆

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积与副对角线上两元素之积的差.

例题 1　计算 $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=4\times(-4)-3\times 6=-34$，$\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=5\times 6-4\times 9=-6$.

例题 2　解方程$\begin{vmatrix} x-2 & 5 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=0$.

解　因为$\begin{vmatrix} x-2 & 5 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=(x-2)(x+2)-5(x-2)=(x-2)(x+2-5)=0$

所以$x=2$或$x=3$.

二、三阶行列式

在讨论三元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$，引入三阶行列式这一工具.

1. 三阶行列式定义

将3^2个数$a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33}$排成的一个三行三列的式子, 两边再各加上一条竖线所构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**，它的展开式是 3！=6 项乘积的代数和，即

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

当$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$时，三元一次方程组的解可用三阶行列式表示,

$$x=\frac{D_x}{D}, \qquad y=\frac{D_y}{D}, \qquad z=\frac{D_z}{D}$$

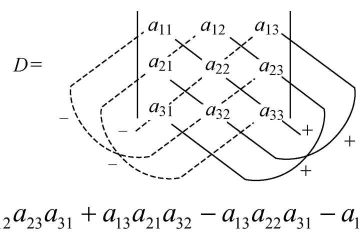
其中，D_x、D_y和D_z是系数行列式D中x、y和z的系数依次分别换成方程组右端的常数项而成的行列式．即

$$D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

2. 三阶行列式的计算

（1）对角线法则

为了便于记忆我们用对角线法则表示，即



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

例题 3　计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}$的值.

解　$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2\times0\times9+1\times0\times0+3\times4\times2-3\times0\times0-1\times4\times9-2\times0\times2=-12$

三、*n* 阶行列式

三阶行列式可以按第一行展开成三个二阶行列式的代数和，同样可用三阶行列式来定义四阶行列式，以此类推．按照这一规律在定义了$n-1$阶行列式的基础上，便可得到n阶行列式的定义.

1．*n* 阶行列式定义

由n^2个数排成n行n列的正方形数表，两边再各加上一条竖线所构成的记号，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**，其中$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$称为n阶行列式的**元素**，通常把n阶行列式简记为大写字母D或D_n．n阶行列式从左上角到右下角的元素$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$的连线称为**主对角线**，从右上角到左下角的元素$a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$的连线称为**副对角线**.

n阶行列式是一个数，其值为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+2}M_{1n}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}$$

其中，M_{ij}表示在n阶行列式中，把元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$所在的第i行和第j列划去后，剩下的元素按原来的次序组成的$n-1$阶行列式，称为元素a_{ij}的**余子式**．而$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称A_{ij}为元素a_{ij}的**代数余子式**.

注：（1）为了方便，定义一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$.

（2）n阶行列式的展开式中共有$n!$项.

（3）以上n阶行列式的定义式，是利用行列式的第一行元素来定义行列式的，这个式子通常称为行列式**按第一行元素的展开式**．行列式也可按第一列元素展开，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{k1}$$

（4）n阶行列式按某一行或某一列展开时应尽量选取零元素居多的行或列.

例题 4 计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -3 \end{vmatrix}$的值.

解 $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} + (-3)\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times 3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 3\times\left[1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\right] = -6\times 3 + 3\times 3 = -9$$

四、特殊行列式

1. 对角行列式

除对角线元素外其余元素为零的行列式称为**对角行列式**.

例如：$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1,n-1} & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} & & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 & \\ & & \iddots & & \\ & \lambda_{n-1,n-1} & & & \\ \lambda_{nn} & & & & \end{vmatrix}$.

例题 5 计算行列式$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix}$的值.

解 $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\begin{vmatrix} \lambda_2 & & & & \\ & \lambda_3 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\begin{vmatrix} \lambda_3 & & & & \\ & \lambda_4 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例题 6 计算行列式$\begin{vmatrix} & & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 & \\ & & \iddots & & \\ & \lambda_{n-1,n-1} & & & \\ \lambda_{nn} & & & & \end{vmatrix}$的值.

解

$$\begin{vmatrix} & & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 & \\ & & \iddots & & \\ & \lambda_{n-1,n-1} & & & \\ \lambda_{nn} & & & & \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} & & & & \lambda_2 \\ & & & \lambda_3 & \\ & & \iddots & & \\ & \lambda_{n-1,n-1} & & & \\ \lambda_{nn} & & & & \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1(-1)^{1+n}\lambda_2(-1)^{1+n-1}\begin{vmatrix} & & & & \lambda_3 \\ & & & \lambda_4 & \\ & & \iddots & & \\ & \lambda_{n-1,n-1} & & & \\ \lambda_{nn} & & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}(-1)^{1+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

2．上（下）三角行列式

对角线以下（上）的元素全为零的行列式称为**上（下）三角行列式**.

例如
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 2 & \cdots & 2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & n \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 1 & & & \\ -3 & 0 & & \\ 74 & 81 & -2 & \\ 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

例题 7　计算行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$
的值.

解
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

习题 6-2

1．计算下列行列式的值.

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$　　　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$　　（6）$\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$

（7）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$　　（8）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

（9）$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & n-1 & \\ & & & & n \end{vmatrix}$　　（10）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n-1 \\ n & & & & 0 \end{vmatrix}$

（11）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 2 & \cdots & 2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & n \end{vmatrix}$　　（12）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 74 & 81 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

2．解方程.

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$　　（2）$\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$　　（3）$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & x+1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = 0$

3．解方程组.

（1）$\begin{cases} 3a-2b=12 \\ 2a+b=1 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2a+b=3 \\ b-3c=1 \\ a+2c=-1 \end{cases}$

第三节　行列式的性质

学习内容：行列式的性质.

目的要求：理解行列式的六大性质，熟练掌握使用行列式的性质计算行列式.

重点难点：行列式的性质及推论，利用性质计算行列式.

一、行列式的性质

从行列式的定义出发直接计算行列式是比较麻烦的，为了简化行列式的计算，下面我们给出行列式的一些基本性质.

将行列式 D 的对应行、列互换后，得到新的行列式 D^{T}，D^{T} 称为 D 的**转置行列式**．即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【性质 1】　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$．

说明： 性质 1 说明行列式中行与列的地位是平等的，对行列式中行成立的性质，对列也同样成立，反过来也是对的．正因为如此，下面对行列式的讨论大多对行来进行．

例如，上三角形行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，其转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}，显然，\ D=D^{\mathrm{T}}.$$

【性质 2】　互换行列式的两行（或两列），行列式变号．

例如　交换三阶行列式的第一行与第三行，由性质 2 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

【推论 1】　如果行列式有两行（或两列）的对应元素相同，则这个行列式等于零．

例如　$\begin{vmatrix} 3 & 12 & 15 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \\ 6 & 16 & 23 & 31 \\ 3 & 12 & 15 & 5 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 7 \\ 8 & 61 & 8 \\ 21 & 76 & 21 \end{vmatrix}=0$．

【性质 3】　n 阶行列式等于它的任一行（或任一列）的每个元素与其对应的代数余子式的乘积之和．即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

性质 3 说明了行列式可按任一行（或列）展开. 在具体计算时，只要行列式的某一行（列）的零元素多，我们就按该行（列）来展开，这样降低了行列式的阶数，从而简化运算.

例题 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&-3&1&0\\4&-1&6&2\\0&4&0&1\\0&1&-1&0\end{vmatrix}.$$

解 按第一列展开，得

$$D=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&6&2\\4&0&1\\1&-1&0\end{vmatrix}+4\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3&1&0\\4&0&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=2\times(-3)-4\times(-2)=2$$

【性质 4】 行列式的某一行（或列）的所有元素都乘以同一个常数 k，等于用 k 乘以该行列式，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

这个性质也可叙述为：行列式中某一行（或列）所有元素的公因子可以提到行列式符号的外边. 由此性质，容易得到如下推论.

【推论 3】 如果行列式有两行（或列）的元素对应成比例，则行列式等于零.

例题 2 计算行列式$\begin{vmatrix}2&5&5\\6&4&10\\3&6&15\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix}2&5&5\\6&4&10\\3&6&15\end{vmatrix}=2\times3\times\begin{vmatrix}2&5&5\\3&2&5\\1&2&5\end{vmatrix}=2\times3\times5\times\begin{vmatrix}2&5&1\\3&2&1\\1&2&1\end{vmatrix}=30(4+6+5-2-4-15)=-180$

【性质 5】 如果行列式的某一行（或列）的元素都可表示为两数之和，那么这个行列式等于两个行列式之和，这两个行列式除该行（或列）的元素分别为这两数之一外，其余各行（或列）的元素都与原来行列式的对应行（或列）相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例题 3 $\begin{vmatrix} 4 & 427 & 327 \\ 5 & 543 & 443 \\ 7 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 400+27 & 300+27 \\ 5 & 500+43 & 400+43 \\ 7 & 700+21 & 600+21 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 400 & 300+27 \\ 5 & 500 & 400+43 \\ 7 & 700 & 600+21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 27 & 300+27 \\ 5 & 43 & 400+43 \\ 7 & 21 & 600+21 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 400 & 300 \\ 5 & 500 & 400 \\ 7 & 700 & 600 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 400 & 27 \\ 5 & 500 & 43 \\ 7 & 700 & 21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 27 & 300 \\ 5 & 43 & 400 \\ 7 & 21 & 600 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 27 & 27 \\ 5 & 43 & 43 \\ 7 & 21 & 21 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 4 & 27 & 3 \\ 5 & 43 & 4 \\ 7 & 21 & 6 \end{vmatrix} = 5400$$

【性质 6】 将行列式的某一行（或列）的元素都乘以同一个常数 k 后，再加到另一行（或列）的对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+ka_{i1} & a_{s2}+ka_{i2} & \cdots & a_{sn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用行列式的性质，可以简化行列式的计算，特别是利用这里的性质 2 和性质 6，总可将一个 n 阶行列式化简为容易计算的上三角行列式．当然在化简行列式的过程中，注意综合运用行列式的其他性质，有助于方便计算行列式．

习题 6-3

1．计算下列行列式的值．

（1）$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 8 & 10 \\ 4 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} a^2c & ac & ab \\ ab & b & c \\ ad & d & a \end{vmatrix}$ （4）$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \end{vmatrix}$

2．利用行列式的性质证明.

（1）$\begin{vmatrix} a_1+tb_1 & a_2+tb_2 & a_3+tb_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

（2）$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

第四节　行列式的计算

学习内容：利用行列式的性质计算行列式.

目的要求：理解并熟练掌握使用行列式的性质，降阶法及三角法求解行列式.

重点难点：利用降阶法及三角法求解行列式，利用行列式的性质计算行列式.

一、行列式的计算

1．降阶法

把行列式按选定的某一行或某一列展开，把行列式的阶数降低，再求出它的值. 通常是利用性质 6，在某一行或某一列中产生很多个零元素，再按包含零元素最多的行或列展开.

2．三角法

主要是利用性质 2 和性质 6，把行列式化简为容易计算的上三角（或下三角）行列式再求值.

下面将通过例题说明如何应用行列式性质计算行列式，为使计算过程清楚，我们引入一些记号.

用 r_i 表示第 i 行，c_i 表示第 i 列.

（1）交换 i,j 两行（或两列）：$r_i \leftrightarrow r_j\left(c_i \leftrightarrow c_j\right)$；

（2）用数 k 乘以第 i 行（或列）：$kr_i\left(kc_i\right) \quad k \neq 0$；

（3）用数 k 乘以第 j 行（或列）再加到第 i 行（或列）上：$kr_j+r_i\left(kc_j+c_i\right)$.

例题 1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解法一（三角法）

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[5r_1+r_4]{-r_1+r_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal[-8r_2+r_4]{4r_2+r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\frac{5}{4}r_3+r_4}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&0&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=40$$

解法二（降阶法）：

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[5r_1+r_4]{-r_1+r_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-8&4&-6\\2&1&-1\\16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal[-8r_1+r_3]{4r_2+r_1}-\begin{vmatrix}0&8&-10\\2&1&-1\\0&-10&15\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}8&-10\\-10&15\end{vmatrix}=40$$

例题 2　求解方程

$$\begin{vmatrix}x&2&2&2\\2&x&2&2\\2&2&x&2\\2&2&2&x\end{vmatrix}=0.$$

解

$$\begin{vmatrix}x&2&2&2\\2&x&2&2\\2&2&x&2\\2&2&2&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+6&x+6&x+6&x+6\\2&x&2&2\\2&2&x&2\\2&2&2&x\end{vmatrix}=(x+6)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&x&2&2\\2&2&x&2\\2&2&2&x\end{vmatrix}$$

$$=(x+6)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&x-2&0&0\\2&0&x-2&0\\2&0&0&x-2\end{vmatrix}=(x+6)(x-2)^3=0$$

解得 $x_1=-6,x_2=x_3=x_4=2.$

例题 3　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{-r_3+r_4} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal{-r_2+r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-r_1+r_2} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal{-r_3+r_4} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} \xlongequal{-r_2+r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-r_3+r_4} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

习题 6-4

1．计算行列式.

（1） $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

（2） $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

（3） $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

（4） $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

第五节　克莱姆法则

学习内容：克莱姆法则.

目的要求：理解并掌握使用克莱姆法则判断齐次线性方程组解的情况，熟练掌握使用克莱姆法则求解线性方程组.

重点难点：利用克莱姆法判断齐次线性方程组解的情况，利用克莱姆法则求解线性方程组.

一、克莱姆法则

解　n 元一次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$　（1）

方程组中未知量前的系数组成的行列式称为**系数行列式**，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 1（**克莱姆法则**）　如果 n 个方程组成的 n 元线性方程组（1）的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组（1）必有唯一解：

$$x_j = \frac{D_j}{D}(j = 1, 2, \cdots, n)$$

其中，$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & b_i & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n)$

是将系数行列式 D 中第 j 列的元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 对应地转换为方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 得到的行列式：

注意　用克莱姆法则求解线性方程组必须满足两个条件:

① 未知量的个数必须等于方程的个数;

② 系数行列式不能等于零.

例题 1　解方程组 $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$.

解　因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0，\quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 14，\quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 21$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{21}{7}=3$$

例题 2 解方程组 $\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+3z=9 \\ -x+y+4z=6 \end{cases}$.

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-30\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-30,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \end{vmatrix}=30,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}=-60$$

所以

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-30}{-30}=1,\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{30}{-30}=-1,\quad z=\frac{D_3}{D}=\frac{-60}{-30}=2$$

例题 3 解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-2x_4=1 \\ 7x_1-3x_2+5x_3-2x_4=38 \end{cases}$.

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 7 & -3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 38 & -3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=-49,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 38 & 5 & -2 \end{vmatrix}=-35,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & 38 & -2 \end{vmatrix}=-28,\quad D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 5 & 38 \end{vmatrix}=-56$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-49}{-7}=7,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-35}{-7}=5,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-28}{-7}=4,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{-56}{-7}=8$$

定义 1　如果线性方程组（1）的常数项全部为零，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

则称方程组（2）为**齐次线性方程组**，否则称为**非齐次线性方程组**.

由克莱姆法则可得以下结论.

定理 2　如果齐次线性方程组（2）的系数行列式不等于零，则方程组（2）只有唯一零解，即 $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$.

换句话说，如果齐次线性方程组（2）有非零解，则其系数行列式必等于零.

例题 4　λ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_3 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？

解　当 $D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ 时，该齐次线性方程组有非零解，即 $-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$，解方程，得 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 3$.

习题 6-5

1．求解下列方程组

（1）$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 5x_1 - 4x_2 = 6 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 13x_4 = 18 \end{cases}$

2．λ取何值时，齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x+y+z=0\\ x+\lambda y-z=0\\ 2x-y+z=0\end{cases}$只有零解？

3．求一个二次多项式$f(x)=ax^2+bx+c$，满足$f(-1)=-6$，$f(1)=-2$，$f(2)=-3$.

第六节　行列式部分测试题

一、填空题

1．行列式$\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=$__________________.

2．已知$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=m$，$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3^* & b_3^* & c_3^*\end{vmatrix}=n$，则$\begin{vmatrix}2a_1 & 2b_1 & 2c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ -a_3-a_3^* & -b_3-b_3^* & -c_3-c_3^*\end{vmatrix}=$______.

3．行列式$\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & 3 & 2\\ -3 & 1 & 5\end{vmatrix}$的代数余子式$A_{31}=$____________，$A_{23}=$______________.

4．行列式$\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 6 & 7\\ 4 & 3 & 0\end{vmatrix}$的代数余子式$A_{23}=$______________.

5．$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$__________.

6．当$a=$________时，行列式$\begin{vmatrix}1 & 0 & a\\ -2 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$的值为零.

7．线性方程组$\begin{cases}ax_1+bx_2=m\\ cx_1+dx_2=n\end{cases}$的系数满足___________时，方程组有唯一解.

二、选择题

1．若$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2$，则$x=$（　　）．

A．0　　B．30　　C．$\dfrac{30}{7}$　　D．4

2．$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=$（　　）．

A．$abcd$　　B．$-abcd$　　C．$2abcd$　　D．$-2abcd$

3．$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$的第二行第二列的元素的代数余子式为（　　）．

A．$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$　　B．$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$　　C．$-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$　　D．$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

4．与$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$的值相等的行列式是（　　）．

A．$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$　　B．$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

C．$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$　　D．$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

5．与$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$的值正好相反的行列式是（　　）．

A．$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$　　B．$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

C．$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$　　D．$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

6．将行列式A的第一行乘以2，再将得到的行列式的第一行加到第二行，得到行列式B，则（　　）．

A．B的值与A的值相等　　B．B的值是A的值的2倍

C．A的值是B的值的2倍　　D．B的值与A的值相差一个符号

7．将行列式 A 的第一列与第二列对换，再将得到的行列式的第二列乘以 -1，得到行列式 B，则（　　）.

A．B 的值与 A 的值相等　　B．B 的值是 A 的值的相反数

C．B 的值是 A 的值的 2 倍　　D．B 的值与 A 的值没有关系

8．下列命题错误的是（　　）.

A．n 阶行列式 A 与 B 相加等于将它们对应的元素相加所得到的行列式

B．行列式 A 有两列元素相等，其值等于零

C．将行列式 A 的第一行乘以 5，A 的值必扩大 5 倍

D．行列式 A 与 A' 的值相等（A' 是 A 的转置行列式）

9．下列命题正确的是（　　）.

A．行列式 A 的值等于零的充分必要条件是 A 有一行元素全为零

B．行列式按第一行展开所求得的值与按第一列展开所求得的值必相等

C．交换行列式两列，其值不变

D．将行列式的某一行乘以 -1 加到另一行上去，所得到的行列式的值是原行列式的值的相反数

10．$\begin{vmatrix} 1 & a & ad \\ 2 & b & bd \\ 3 & c & cd \end{vmatrix}$ 的值等于（　　）.

A．$abcd$　　B．d　　C．6　　D．0

11．下列命题正确的是（　　）.

A．代数余子式与相应的余子式正好互为相反数

B．若 n 个方程的线性方程组中常数项全为零，则只有零解

C．将行列式的第一行元素乘以 c，加到第二行上，其值扩大 c 倍

D．行列式 A 的第二行是第一行的 2 倍，第三行是第一行的 3 倍，则 A 的值必等于零

12．行列式 A 的第二行第三列元素的余子式为 M，则第二行第三列元素的代数余子式是（　　）.

A．M　　B．$-M$　　C．$(-1)^{i+j}$　　D．无法确定

三、计算题

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

2．解方程 $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 2 & x+1 \end{vmatrix}=0$.

3．计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4．解方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}=0$.

5．用克莱姆法则求解方程组$\begin{cases} 3x_1+5x_2+x_3=4 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=-3 \\ 5x_1+4x_2-2x_3=2 \end{cases}$.

四、证明题

1．当$\lambda\neq 1,2$时，线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = b_3 \end{cases}$对于任何实数$b_1,b_2,b_3$都有唯一解.

2．当$\lambda\neq 1$时，齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ (\lambda+2)x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$只有零解.

第七节　矩阵的概念与运算

学习内容：矩阵的概念，矩阵的运算（相等、线性运算、矩阵的乘法、矩阵的转置等）.
目的要求：理解矩阵的概念，熟练掌握矩阵的相等、线性运算、乘法运算等.
重点难点：矩阵的概念，矩阵的乘法、方阵行列式的计算.

一、矩阵的概念

1. 矩阵的概念定义

由 $m\times n$ 个元素 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 ***m* 行 *n* 列矩阵**，简称 $m\times n$ **矩阵**，其中 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n)$ 称为矩阵的**第 *i* 行第 *j* 列元素**.

根据元素的特点，矩阵可分为实矩阵（元素都是实数）与复矩阵．本书中的数与矩阵，除特别说明外，都指实数与实矩阵.

通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，…表示矩阵．例如，记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

有时也简记为 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$.

例题 1　北京、天津、南京、上海四个城市中，北京到天津 137km，北京到上海 1460km，北京到南京 1250km，天津到上海 1320km，天津到南京 1080km，南京到上海 220km，试写出表示着四个城市里程的矩阵.

解　可记作矩阵：

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{北京} & \text{天津} & \text{上海} & \text{南京} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 137 & 1460 & 1250 \\ 137 & 0 & 1320 & 1080 \\ 1460 & 1320 & 0 & 220 \\ 1250 & 1080 & 220 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{北京} \\ \text{天津} \\ \text{上海} \\ \text{南京} \end{array}$$

其中，矩阵的第一行表示北京到北京、天津、上海、南京四个城市的里程，第二行、第三行、第四行分别表示天津、上海、南京到北京、天津、上海、南京四个城市的里程.

2. 特殊矩阵

下面给出一些特殊矩阵.

（1）零矩阵

元素全为零的矩阵称为零矩阵，例如 $\boldsymbol{A}=(0)_{m\times n}$，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

（2）行矩阵、列矩阵

只有一行的矩阵称为**行矩阵**, 此时 m=1, 例如 $\boldsymbol{A}=(a_1\quad a_2\quad ...\quad a_n)_{1\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=\left[a_1,a_2,...,a_n\right]$；

只有一列的矩阵称为**列矩阵**，此时 n=1，例如 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$ 或 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

（3）方阵

当 $m=n$ 时，$m\times n$ 矩阵称为 n **阶方阵**，用 $\boldsymbol{A}_n$ 表示，即 $\boldsymbol{A}_n=(a_{ij})_{n\times n}$．方阵 $\boldsymbol{A}_n$ 中，左上角到右下角的连线称为**主对角线**，其上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角线上的元素**.

一阶方阵相当于一个数，如 $(a)=a$.

（4）对角矩阵

主对角线以外的元素都是零的方阵称为**对角矩阵**，例如

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}，简记为\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$（未写出元素都是零）.

（5）单位矩阵

主对角线上的元素都是 1 的 n 阶对角矩阵称为 n **阶单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{E}_n$ （n 为单位阵的阶数），在阶数不致混淆时，简记为 $\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

（6）三角矩阵

主对角线下方的元素全为零的方阵称为**上三角矩阵**，一般形式为 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$；

主对角线上方的元素全为零的方阵称为**下三角矩阵**，一般形式为 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

（7）对称矩阵

满足条件 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的方阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 称为**对称矩阵**．对称矩阵的特点是，它的元素以主对角线为对称轴对应相等．例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

二、矩阵的运算

1. 矩阵的相等

如果 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 与 $\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)$ 都是 $m\times n$ 矩阵，并且它们的对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注意：① 矩阵相等的前提是两个矩阵是同型矩阵，即两个矩阵行数相同，列数也相同.

② 矩阵相等与行列式相等有本质的区别，例如 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$，而 $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1$.

例题 2 设 $\begin{bmatrix}9&0\\x&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&0\\-5&y\end{bmatrix}$，求 x，y.

解 由矩阵相等的定义得 $x=-5, y=6$.

2. 矩阵的转置

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

把 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行均换成同序数的列，所得到的 $n\times m$ 矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$（或 $\boldsymbol{A}'$）. 即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

例如：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{bmatrix}$.

显然：① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；②方阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

一般地，矩阵转置满足以下运算律：

① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；③ $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；④ $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

3. 矩阵的线性运算

（1）矩阵的加减法

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的对应元素相加(或相减)得到的 $m\times n$ 矩阵，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和或差，记为 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}\pm(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$.

例题 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&4&5\\2&3&0&8\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1+0&2+1&3+4&4+5\\5+2&6+3&7+0&8+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&7&9\\7&9&7&16\end{bmatrix}$

$$A-B=\begin{bmatrix}1-0 & 2-1 & 3-4 & 4-5\\ 5-2 & 6-3 & 7-0 & 8-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 3 & 3 & 7 & 0\end{bmatrix}$$

注意：只有同型矩阵才能进行加、减运算.

矩阵的加法满足下列运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 都是 $m\times n$ 矩阵)：

① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$（加法交换律）;

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$（加法结合律）;

③ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

（2）矩阵的数乘

用数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的每一个元素相乘所得的矩阵, 称为 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数乘矩阵**, 记为 λA，即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\lambda\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{bmatrix}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}\qquad (\lambda\text{ 为常数})$$

特别地，当 $\lambda=-1$ 时，可得 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵 $-\boldsymbol{A}$，则有 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

例题 4　设甲、乙、丙三个樱桃产地与四个樱桃销售市场之间的距离（单位 km）用如下矩阵表示：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}82 & 90 & 86 & 91\\ 93 & 89 & 92 & 80\\ 85 & 82 & 90 & 94\end{bmatrix}$$

如果运送樱桃每吨需要花费 20（元/km），将这三个产地与四个销售市场之间每运 1 吨樱桃的运价用矩阵表示.

解　由题意 $20\boldsymbol{A}=20\begin{bmatrix}82 & 90 & 86 & 91\\ 93 & 89 & 92 & 80\\ 85 & 82 & 90 & 94\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1640 & 1800 & 1720 & 1820\\ 1860 & 1780 & 1840 & 1600\\ 1700 & 1640 & 1800 & 1880\end{bmatrix}$.

矩阵的数乘满足下列运算定律（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 是任意实数）：

① 结合律　$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu A)$；

② 分配率　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

注意：矩阵的加减与数乘统称为矩阵的线性运算.

4．矩阵的乘法运算

（1）矩阵乘法的定义

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则规定 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$\begin{aligned}c_{ij}&=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}\\ &=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\qquad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

记作：$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注：① 一行与一列相乘

$$\left(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is}\right)\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} = c_{ij}$$

故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列位置上的元素 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的乘积.

② 只有 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{AB}$ 才有意义（乘法可行）

例题 5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解

$$c_{11}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=3\times1+(-1)\times1+1\times2=4$$

$$c_{12}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=3\times0+(-1)\times2+1\times1=-1$$

$$c_{13}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}=3\times0+(-1)\times0+1\times3=3$$

$$c_{14}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}=3\times0+(-1)\times0+1\times4=4$$

同理可得

$$c_{21}=2, c_{22}=2, c_{23}=6, c_{24}=8$$

得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

注： $\boldsymbol{BA}$ 乘法不可行.

例题 6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -8 & -16 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

由此发现：(1) $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$，（不满足交换律）；

(2) $\boldsymbol{A}\neq 0$，$\boldsymbol{B}\neq 0$，但却有 $\boldsymbol{BA}=0$.

(2) 矩阵乘法的运算律（假定运算是可行的）

① $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$（乘法结合律）；

② $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$（左乘分配律），

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$（右乘分配律）；

③ $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$（数乘分配率）；

④ $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}$（单位矩阵的意义所在）.

(3) 矩阵方程

学习了矩阵的乘法，我们可以把线性方程组写成矩阵形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

令
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

那么该方程组的矩阵形式为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，这种形式的方程称为**矩阵方程**.

例题 7　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$，求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

解　因为 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{bmatrix}$，所以 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 6 & 20 \\ -7 & -5 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$；

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 20 \\ -7 & -5 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}.$$

且有 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

5. 方阵的行列式

由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的 n 阶行列式（各元素的位置不变），称为**方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式**. 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$（determinant）.

即若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

那么

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意：方阵与其行列式不同，前者为数表，后者为一个数.

方阵的行列式满足下列运算律：

① $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$；

② $|kA|=k^n|A|$（$A_{n\times n}$）；

③ $|AB|=|A||B|$.

式③表明，对于同阶方阵 A,B，虽然一般 $AB\neq BA$，但 $|AB|=|BA|$.

例题 8 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$，求 $|AB|$.

解 （方法一） $\because AB=\begin{bmatrix}-1&8\\0&15\end{bmatrix}$，$\therefore |AB|=\begin{vmatrix}-1&8\\0&15\end{vmatrix}=-15$.

（方法二） $|AB|=|A||B|=\begin{vmatrix}1&2\\3&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}=(-3)\times 5=-15$.

习题 6-7

1．按要求解题.

（1）设 $\begin{bmatrix}x&y\\2&x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\2&z\end{bmatrix}$，求 x,y,z.

（2）设 $A=\begin{bmatrix}2&-1&4\\0&3&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}7&4&0\\-1&3&2\end{bmatrix}$，求 $2A+3B,2A-3B$.

（3）设 $A=\begin{bmatrix}-1&2&3&1\\0&2&-1&3\\4&2&0&5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\4&-3&1&1\\1&0&2&5\end{bmatrix}$，求 $2A+3B,2A-3B$

（4）设矩阵 X 满足 $\begin{bmatrix}-1&2&5\\0&1&2\end{bmatrix}+2X=3\begin{bmatrix}5&0&-1\\3&7&2\end{bmatrix}$，求 X.

（5）已知 $A=\begin{bmatrix}3&0&-1&2\\2&8&3&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}5&6&3&2\\2&4&7&-1\end{bmatrix}$，且 $A+2X=B$，求 X.

2．应用题

设从某地四个地区到另外三个地区的距离（单位 km）为

$$B=\begin{pmatrix} 40 & 60 & 105 \\ 175 & 130 & 190 \\ 120 & 70 & 135 \\ 80 & 55 & 100 \end{pmatrix}.$$

则，已知货物每吨的运费为 2.40 元/km．那么，各地区之间每吨货物的运费用矩阵怎样表示？

3．应用题

某地有 A、B 两个工厂，生产甲、乙、丙三种产品．用表 1 表示一年中各个工厂生产的各种产品的数量，用表 2 表示各种产品的单位价格（元）及单位利润（元），表 3 表示各个工厂的总收入和总利润．试将上述三个表用矩阵表示出来．

表 1

	甲	乙	丙
A	3000	3500	5000
B	4000	3000	3500

表 2

	单位价格（元）	单位利润（元）
甲	200	20
乙	400	42
丙	300	31

表 3

	总收入（元）	总利润（元）
A	$3000\times200+3500\times400+5000\times300$	$3000\times20+3500\times42+5000\times31$
B	$4000\times200+3000\times400+3500\times300$	$4000\times20+3000\times42+3500\times31$

第八节　矩阵的初等变换与矩阵的秩

学习内容：矩阵的初等变换，矩阵的秩．

目的要求：掌握矩阵的初等变换和矩阵秩的概念，会用定义及初等变换法求矩阵的秩．

重点难点：矩阵的初等变换，利用初等变换法求矩阵的秩．

一、矩阵的初等变换

1．矩阵的三种初等变换

（1）串位变换：任意交换矩阵的两行（列）；用 $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示第 i 行（列）和第 j 行（列）互换；

（2）数乘变换：以一个非零的常数 k 乘以矩阵的某一行（列）；kr_i（或 kc_i）表示用 $k(k\neq0)$ 乘以第 i 行（列）；

（3）消元变换：把矩阵的某一行（列）的 k 倍加于另一行（列）上；用 kr_i+r_j（或kc_i+c_j）表示将第 i 行（列）的 k 倍加到第 j 行（列）上．

只对行进行的初等变换称为**初等行变换**（以下讨论中只对矩阵的行进行变换）.

2. 阶梯形矩阵

满足以下条件的矩阵称为**阶梯形矩阵**：

（1）矩阵的所有零行（若存在的话）在矩阵的最下方；

（2）各个非零行的首个非零元素的列标随着行标递增而严格增大.

例如：$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. 行最简阶梯形矩阵

满足以下条件的阶梯形矩阵称为**行最简阶梯形矩阵**：

（1）非零行的首个非零元素都是 1；

（2）首个非零元素所在列的其余元素都为 0.

例如：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

定理 1　任一矩阵经过若干次初等行变换都可化成阶梯形矩阵，进而化为行最简阶梯形矩阵.

例题 1　用初等行变换把矩阵$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$化为行最简阶梯形矩阵.

解　$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{4r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & -9 \end{bmatrix}$（阶梯型矩阵）

$\xrightarrow{\frac{1}{15}r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow[2r_3 + r_1]{-3r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$（行最简阶梯型矩阵）.

二、矩阵的秩

矩阵的秩是一个很重要的概念，在研究线性方程组的解等方面起着非常重要的作用.

1. k 阶子式的定义

在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中任取 k 行 k 列 $(1 \leq k \leq \min(m,n))$，由位于这些行、列相交处的元素按原

来的次序构成的k阶行列式，称为$\boldsymbol{A}$的一个k**阶子式**，记作$D_k(\boldsymbol{A})$.

$D_k(\boldsymbol{A})$共有$C_m^k \cdot C_n^k$个.

例如　$\boldsymbol{A}_{3\times4}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$有4个三阶子式、18个二阶子式.

2. 矩阵秩的定义

若矩阵$\boldsymbol{A}$中不为零的子式的最高阶数是r，则称r为矩阵$\boldsymbol{A}$的**秩**，记作

$$r(\boldsymbol{A})=r.$$

结论：

（1）$r(\boldsymbol{A})=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=0$；

（2）对于$\boldsymbol{A}_{m\times n}$，有$0\le r(\boldsymbol{A})\le \min(m,n)$；

（3）若$r(\boldsymbol{A})=r$，则$\boldsymbol{A}$中至少有一个$D_r(\boldsymbol{A})\neq 0$，而所有的$D_{r+1}(\boldsymbol{A})=0$.

注意：设$\boldsymbol{A}_{n\times n}$，若$r(\boldsymbol{A})=n$，则称$\boldsymbol{A}$为**满秩方阵**；若$r(\boldsymbol{A})<n$，则称$\boldsymbol{A}$为**降秩方阵**.

例题 2　求下列矩阵的秩.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

解　$\boldsymbol{A}$的所有三阶子式（4个）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

而$D_2(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以$r(\boldsymbol{A})=2$.

因为

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -1 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -36\neq 0$$

所以$r(\boldsymbol{B})=4$.

三、利用初等变换求矩阵的秩

定理 2　矩阵的初等变换不改变矩阵的秩（证明略）.

矩阵$\boldsymbol{A}$经过有限次初等行变换化为阶梯形矩阵，则该阶梯形矩阵非零行的个数r称为矩阵$\boldsymbol{A}$的秩，记为$r(\boldsymbol{A})$，即$r(\boldsymbol{A})=r$.

例题 3 求 $r(\boldsymbol{A})$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{bmatrix}$.

解 $\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&-2&2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&-2&2&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$（阶梯型矩阵）.

由此可看出 $r(\boldsymbol{A})=3$.

注意：在具体的解题过程中，如果 $\boldsymbol{A}$ 经过几次初等变换后即可看出 $r(\boldsymbol{A})$ 的秩时，就不必再继续将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形.

习题 6-8

1．用初等行变换将下列矩阵化为行最简形阶梯矩阵，并求矩阵的秩.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&1&1\\1&2&-3&2\\4&4&-2&3\end{bmatrix}$　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\3&0&6\\2&1&4\end{bmatrix}$

2．用初等行变换求下列矩阵的秩.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&-3&4\\1&1&-2\end{bmatrix}$　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2&11\\1&-3&-3&-14\\3&1&1&8\end{bmatrix}$

（3）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2&11\\1&2&-3&-14\\3&1&1&3\\2&5&5&28\end{bmatrix}$　　（4）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&2\\0&-1&2&3&1\\1&-1&1&2&3\\1&2&-5&-7&0\end{bmatrix}$

第九节　逆　矩　阵

学习内容：逆矩阵的概念与求解.

目的要求：掌握逆矩阵的概念、性质，熟练掌握逆矩阵存在的条件，学会使用伴随矩阵求逆矩阵及用初等行变换求逆矩阵.

重点难点：矩阵的概念、性质、存在的条件；用伴随矩阵求逆矩阵及用初等行变换求逆矩阵.

一、逆矩阵的概念与性质

1. 逆矩阵的概念

设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，若存在一个n阶方阵$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，

则称方阵$\boldsymbol{A}$**可逆**，并称方阵$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{A}$的**逆矩阵**或**逆矩阵**，记为$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

注意：①逆矩阵是对方阵而言的；

② 由定义可知此时$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$（$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$可交换位置）；

③ 若$\boldsymbol{A}$的逆矩阵存在则必唯一.

2. 逆矩阵的性质

性质 1　若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^{-1}$亦可逆，且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

证明　因为$\boldsymbol{A}$可逆，则有$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，从而$\boldsymbol{A}^{-1}$也可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}$的逆矩阵就是$\boldsymbol{A}$，即$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

性质 2　若$\boldsymbol{A}$可逆，数$k\neq 0$，则$k\boldsymbol{A}$也可逆，且$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明　因为$(k\boldsymbol{A})(\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1})=(k\cdot\dfrac{1}{k})\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}=(\dfrac{1}{k}\cdot k)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=(\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1})(k\boldsymbol{A})$，所以$k\boldsymbol{A}$也可逆，且

$$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$$

性质 3　若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$亦可逆，且$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

证明　因为$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，所以$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AA}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$，从而$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，于是$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$亦可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

性质 4　若同阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都可逆，则$\boldsymbol{AB}$也可逆，且$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明　因为$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AEA}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，

所以$\boldsymbol{AB}$可逆，且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

二、逆矩阵存在的条件及求法（利用伴随矩阵求逆矩阵）

1. 伴随矩阵的概念

设 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，称方阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{bmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^*$.

例题 1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^*$.

解　因为 $\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-2$，$\boldsymbol{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=3$，$\boldsymbol{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2$，

$\boldsymbol{A}_{21}=-2$，$\boldsymbol{A}_{22}=6$，$\boldsymbol{A}_{23}=-6$，$\boldsymbol{A}_{31}=2$，$\boldsymbol{A}_{32}=-5$，$\boldsymbol{A}_{33}=4$.

所以　$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

定理 1　方阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$.（证明略）

推论 1　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$（或 $BA=E$），则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$（或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$）.

推论 2　由 $\boldsymbol{A}$ 为满秩方阵 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$. 由此可知：$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 为满秩方阵.

例题 2　判断方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -11 & 15 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ 是否可逆？若可逆，求其逆矩阵.

解　因为 $|\boldsymbol{A}|=-2\neq 0$，$|\boldsymbol{B}|=0$，所以 $\boldsymbol{B}$ 不可逆，$\boldsymbol{A}$ 可逆，并且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

三、利用初等行变换求逆矩阵

定理 2　n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}_n=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以经过一系列初等行变换化为 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}_n$.

其方法为：$(\boldsymbol{A}_n \vdots \boldsymbol{E}_n)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}_n \vdots \boldsymbol{A}_n^{-1})$，其中 $(\boldsymbol{A}_n \vdots \boldsymbol{E}_n)$、$(\boldsymbol{E}_n \vdots \boldsymbol{A}_n^{-1})$ 表示 $n\times 2n$ 的矩阵.

例题 3　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$，用初等变换法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & 3\end{array}\right]\xrightarrow[(-1)\times r_3]{\substack{r_3+r_2\\ 3r_3+r_1}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 0 & -14 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -3\end{array}\right]\xrightarrow{-2r_2+r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -3\end{array}\right]$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ -6 & 1 & 4\\ 5 & -1 & -3\end{bmatrix}.$$

习题 6-9

1．求下列矩阵的逆矩阵.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 0 & 0\\ a^2 & a & 1 & 0\\ a^3 & a^2 & a & 1\end{bmatrix}$

2．判断方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -2 & -1\\ 2 & 5 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

3．求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

4．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{bmatrix}$，求 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

第十节　矩阵部分测试题

一、填空题

1．设$A=\begin{bmatrix}1&2&7\\0&-2&9\\0&0&-2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，则$|AB|=$__________.

2．设矩阵X满足方程$2\begin{bmatrix}3&-1&0\\-1&1&2\end{bmatrix}-3X+\begin{bmatrix}3&-1&6\\5&1&-1\end{bmatrix}=O$，求矩阵$X=$__________.

3．已知三阶方阵A的行列式$|A|=\frac{1}{2}$，则$|-2A|=$__________.

4．设$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\3&3&4\\4&5&6\end{bmatrix}$，$|-A^*|=$__________.

5．三阶方阵A的行列式$|A|=4$，$|A^2+E|=8$，则$|A+A^{-1}|=$__________.

二、选择题

1．A是$m\times k$阶矩阵，B是$k\times t$阶矩阵，若B的第j列元素全为零，则下列结论正确的是（　　）.

A．AB的第j行元素全为零；　　B．AB的第j列元素全为零；

C．BA的第j行元素全为零；　　D．BA的第j列元素全为零.

2．下列矩阵有逆矩阵的是（　　）.

A．$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$　　B．$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

C．$\begin{bmatrix}2&-1\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$　　D．$\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$

3．设矩阵$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}$，则$(AB)^{-1}=$（　　）.

A．$\begin{bmatrix}-6&-8\\-5&-6\end{bmatrix}$　　B．$\begin{bmatrix}6&8\\5&6\end{bmatrix}$

C．$\begin{bmatrix}-6&8\\5&-6\end{bmatrix}$　　D．$\begin{bmatrix}-8&6\\6&-5\end{bmatrix}$

4．$A=\begin{bmatrix}1&-2&-1&3\\3&-6&-3&8\\-2&4&2&k\end{bmatrix}$中的$k=$（　　）时，$r(A)=2$.

A. 0　　B. -2
C. 4　　D. -6

5. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并且 $(2\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 7\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$（　　）.

A. $\begin{bmatrix}2 & 7\\ 1 & 3\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{bmatrix}$

C. $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 7\\ 1 & 3\end{bmatrix}$　　D. $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

6. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于零，则下列结论正确的是（　　）.
A. $\boldsymbol{A}^2$ 的行列式不为零
B. $\boldsymbol{A}$ 有逆矩阵
C. $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵
D. 对任意与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的矩阵 $\boldsymbol{B}$，有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换后得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则下列命题正确的是（　　）.
A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$
B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{B}|$ 或同时为零或同时不为零
C. $|\boldsymbol{A}|=0$，但 $|\boldsymbol{B}|$ 可能不为零
D. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

8. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$（　　）.

A. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

9. 当 $a=$（　　）时，矩阵 $\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ 不可逆.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. -1

10. 下列矩阵可通过初等变换化为 $\boldsymbol{E}_3$ 的是（　　）.

A. $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$

三、计算题

1．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{A}^{-1}$．

2．若 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^2$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$．

3．求下列矩阵的秩.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -5 & 4 & 5\\ 1 & 10 & 1 & 2\end{bmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7\\ 6\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ 3 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$；

（4）$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ 6 & 4 & 2 & 6\end{bmatrix}$.

4．求下列矩阵的逆矩阵．

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$．

第十一节　线性方程组的解法

学习内容：利用克莱姆法则、逆矩阵法、初等行变换法解线性方程组．
目的要求：熟练掌握使用克莱姆法则、逆矩阵法、矩阵的初等行变换法求解线性方程组．
重点难点：逆矩阵法解线性方程组、初等行变换法解线性方程组．

一、克莱姆法则解线性方程组

克莱姆法则：设由 n 个方程组成的 n 元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当系数行列式 $D\neq 0$，则方程组（1）必有唯一解：

$$x_j = \frac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$$

其中
$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & b_i & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (j=1,2,\cdots,n)$$

是将系数行列式 D 中第 j 列的元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换成方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得到的行列式.

注意：克莱姆法则实际上给出了一种求 n 元一次线性方程组的方法.

二、逆矩阵法解线性方程组

定理 1　对于方程组（1），其矩阵形式为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 称为方程组（1）的**系数矩阵**，$\boldsymbol{B}$ 称为方程组（1）的**常数项矩阵**，$\boldsymbol{X}$ 称为 n 元**未知量矩阵**.

则当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 分别乘矩阵方程两边，得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即为方程组（1）的解.

例题 1　解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

解　记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，则方程组可写成矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，

因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=3\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$.

于是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$，即线性方程组的解为 $x_1=5$，$x_2=0$，$x_3=3$.

三、初等行变换法解线性方程组

设由 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，m 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

称为**一般线性方程组**．它可以用矩阵形式写成 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 称为方程组（2）的**系数矩阵**，$\boldsymbol{X}$ 称为 n 元**未知量矩阵**，$\boldsymbol{B}$ 称为**常数项矩阵**．

当 $B = 0$，即常数项 $b_1 = b_2 = \cdots b_m = 0$，方程组（2）称为齐次线性方程组；当 $B \neq 0$ 时，方程组（2）称为非齐次线性方程组．

我们把方程组（2）的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与常数项矩阵 $\boldsymbol{B}$ 放在一起构成的矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (\text{或 } \overline{\boldsymbol{A}})$$

称为方程组（2）的**增广矩阵**．

【引例】　消元法解线性方程组的矩阵形式

在中学阶段，已经学习过用消元法解简单的线性方程组．例如，求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \ \ 4 \\ \ \ x_1 - 2x_2 = -5 \end{cases} \qquad (3)$$

解　第一步，将线性方程组中两个方程的次序对换，得

$$\begin{cases} \ \ x_1 - 2x_2 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 = \ \ 4 \end{cases} \qquad (4)$$

第二步，第二个方程减去第一个方程的 2 倍，方程组就变成

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -5 \\ \qquad 7x_2 = 14 \end{cases} \qquad (5)$$

第三步，用 $\dfrac{1}{7}$ 乘第二个方程的两端，得

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -5 \\ \qquad\ x_2 = \ \ 2 \end{cases} \qquad (6)$$

第四步，第一个方程加上第二个方程的 2 倍，得

$$\begin{cases} x_1 \qquad\ = -1 \\ \qquad x_2 = 2 \end{cases} \qquad (7)$$

显然，方程组（3）至（7）都是同解方程组，因而（7）是方程组（3）的解．

上述解线性方程组的方法，称为消元法．从引例中可知，消元法实际上是对线性方程组进行如下变换：

① 互换两个方程的位置（串位变换）；

② 用一个非零的常数乘某个方程的两端（数乘变换）；

③ 用一个常数乘某个方程后加到另一个方程上（消元变换）.

由于线性方程组与其增广矩阵一一对应，所以对线性方程组进行上述变换，相当于对其增广矩阵实施相应的初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

定理 2 如果通过初等行变换将一个线性方程组的增广矩阵 $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})$ 化为 $(\boldsymbol{C} \vdots \boldsymbol{D})$，则方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{CX} = \boldsymbol{D}$ 是同解方程组.

因此，可采用矩阵的初等行变换，将线性方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化为行最简阶梯形矩阵（若将非零行的第一个非零元素称为主元的话，那么这种行最简阶梯型矩阵即主元为 1，主元所在列的其余元素均为 0 的矩阵）. 从而线性方程组的解就可由行最简阶梯形矩阵对应的线性方程组而得到.

例题 2 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$.

解 对其增广矩阵实施初等行变换，将其化为行最简阶梯形矩阵.

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{\frac{1}{2}r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_1 + r_3]{-4r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_2 + r_3]{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ (-1)r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 + r_2 \\ -r_3 + r_1}]{\frac{1}{3}r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

习题 6-11

1．利用逆矩阵法求线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$.

2．设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使其满足 $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$.

3．利用初等行变换求下列线性方程组.

（1）$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$

第十二节　线性方程组解的判定

学习内容：线性方程组解的判定.

目的要求：学会熟练判定非齐次线性方程组和齐次线性方程组解的情况.

重点难点：非齐次线性方程组和齐次线性方程组解的判定.

一、非齐次线性方程组解的判断

对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, (\boldsymbol{B} \neq 0)$ 解的情况有如下判定定理．其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}，\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}，\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}，\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

定理 1　（非齐次线性方程组解的判定定理）　对非齐次线性方程组（1）有以下结论：

（1）若 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = n$，则方程组有且只有唯一解；

（2）若 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) < n$，则方程组有无穷多解；

（3）若 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) \neq r(\boldsymbol{A})$，则方程组无解.

例题 1　判断方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 5x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$ 解的情况

解　$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&2\\2&-3&5&1\\4&-1&-1&5\\5&0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[-5r_1+r_4]{\substack{-2r_1+r_2\\-4r_1+r_3}}\begin{pmatrix}1&1&-2&2\\0&-5&9&-3\\0&-5&7&-3\\0&-5&9&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2+r_4]{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&2\\0&-5&9&-3\\0&0&-2&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$

因为$r(\overline{A})=4\neq r(A)=3$，所以原方程组无解.

例题 2　判断k为何值时，方程组$\begin{cases}x_1-\dfrac{1}{2}x_2-\dfrac{1}{2}x_3=1\\x_1-2x_2+x_3=k\\x_1+x_2-2x_3=k^2\end{cases}$有无穷多解，无解，有唯一解？

解

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\1&-2&1&k\\1&1&-2&k^2\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&k-1\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&k^2-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&k-1\\0&0&0&(k-1)(k+2)\end{pmatrix}$$

① 当$k=-2$或$k=1$时，$r(\overline{A})=r(A)=2<3$，此时方程组有无穷多解；

② 当$k\neq-2$且$k\neq1$时，$r(\overline{A})\neq r(A)$，此时方程组无解；

③ 方程组有唯一解的情况不存在.

二、齐次线性方程组解的判断

对于齐次线性方程组$AX=O$解的情况有如下判定定理．其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

定理 2　（齐次线性方程组解的判定定理）　对齐次线性方程组$AX=O$有以下结论：

（1）若$r(A)=n$，则方程组有唯一零解；

（2）若$r(A)<n$，则方程组有非零解；

例题 3　判断下列方程组解的情况：

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+5x_2+3x_3=0\\x_1+5x_2+8x_3=0\end{cases}.$$

解　$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&5&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&0&14\end{pmatrix}$，所以

$r(A)=3=n$，故此方程组有唯一零解.

习题 6-12

1．解线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$.

2．判断下列方程组解的情况.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}.$$

3．当 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + bx_4 = a \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多个解？

4．判断 t 为何值时，方程组$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ tx_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + (t+1)x_3 = 0 \end{cases}$有无穷多解、无解、有唯一解？

第十三节　应用实训

行列式是矩阵的重要函数，应用非常广泛，线性方程组是线性代数的主要研究对象之一，它理论严谨、发展完善、处理问题方法独特，可用于解决许多领域的问题．矩阵是指纵横排列的二维数据表格，在生产实践中应用广泛.

一、电路网络问题

例题 1 [见本模块第一节]

相关理论 基尔霍夫第一定律（节点电流定律）：电路中任一节点处流入与流出电流的代数和为零（通常把流入节点的电流取为正，而把流出节点的电流取为负）.

基尔霍夫第二定律（回路电压定律）：电路中任意闭合回路上各支路的电压降之和为零.

问题提出 现在有如图 6-1 所示的直流电路网络．假设各支路上的电阻都是 5Ω，在支路 1 上接入了 20V 的直流电源. 试确定各支路上的电流与电压降.

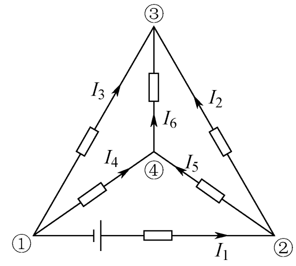


图 6-1　直流电路网络

问题解决 该电路网络有 4 个节点、6 条支路．预先选定各支路上的电流参考方向，对节点①～③应用节点电流定律，得

$$\begin{cases} I_1 - I_3 + I_4 = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_5 = 0 \\ -I_2 + I_3 - I_6 = 0 \end{cases}$$

基尔霍夫第一定律对每个节点都是适用的．我们之所以没有列出节点④所对应的关系方程，是因为这个节点的方程都可以由上面的三个方程线性表示出．此外，在列出节点电流方程之前，预先是可以任意假定各支路上的电流方向的，如果实际计算结果得到的 $I>0$，就表示电流方向与假定的正方向一致；而如果计算结果 $I<0$，就表示电流方向与假定的正方向相反.

再对以下三条封闭回路①→④→③→①，①→②→④→①，②→③→④→②分别应用回路电压定律，有

$$\begin{cases} R_3I_3 + R_4I_4 + R_6I_6 = 0 \\ R_1I_1 - R_4I_4 + R_5I_5 = E_1 \\ R_2I_2 - R_5I_5 - R_6I_6 = 0 \end{cases}$$

其中 $E_1 = 20\text{V}$，是在支路 1 上的电源电动势，而各支路上的电阻 R_i 均为 5Ω.

电路网络中当然不止这三条回路，回路电压定律对任意其他回路也均适用．但由于其余回路列出的方程不难验证都与上面三个方程等价，因而将它们略去．合并上面两个方程组，得到

$$\begin{cases} I_1 - I_3 + I_4 = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_5 = 0 \\ -I_2 + I_3 - I_6 = 0 \\ I_3 + I_4 + I_6 = 0 \\ I_1 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_2 - I_5 - I_6 = 0 \end{cases}$$

求解这个线性方程组，不难得到 $I_1 = 2\text{A}$，$I_2 = I_3 = I_5 = 1\text{A}$，$I_4 = -1\text{A}$，$I_6 = 0\text{A}$．而支路 1 的电压为 10V，支路 2、3、4、5 的电压为 5V，支路 6 的电压为 0.

例题 2 设节点的电流如图 6-2 所示，则由基尔霍夫第一定律求 i_1、i_2、i_3、i_4、i_5、i_6.

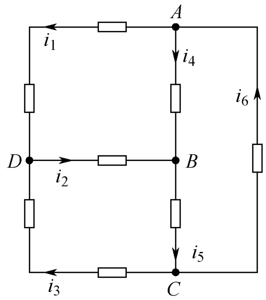


图 6-2

【分析】对于节点 A ：$i_1+i_4-i_6=0$ ；

对于节点 B ：$i_2+i_4-i_5=0$ ；

对于节点 C ：$i_3+i_6-i_5=0$ ；

对于节点 D ：$i_1+i_3-i_2=0$.

于是求个各支路的电流就归结为下面齐次线性方程组的求解.

解：

$$\begin{cases} i_1+i_4-i_6=0 \\ i_2+i_4-i_5=0 \\ i_3-i_5+i_6=0 \\ i_1-i_2+i_3=0 \end{cases}$$

其通解为

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k_1,k_2,k_3\in R$$

由于 i_1、i_2、i_3、i_4、i_5、i_6 均为正数，所以通解中的三个任意常数应满足条件：$k_1<0$，$k_2>k_3>-k_1$.

如果 k_1=-1，k_2=3，k_3=2，则

$$i_1=1 \quad i_2=2 \quad i_3=1 \quad i_4=1 \quad i_5=3 \quad i_6=2$$

二、电路设计问题

例题 3　在电路设计中，经常要把复杂的电路分割为局部电路，每一个电路都用一个网络“黑盒子”来表示. 黑盒子的输入为 u_1、i_1，输出为 u_2、i_2，其输入输出关系用一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来表示（见图 6-3）.

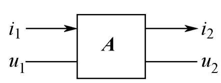


图 6-3　单个子网络模型

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 是 2×2 矩阵，成为该局部电路的传输矩阵. 把复杂的电路分成许多串接局部电路，分别求出它们的传输矩阵，再相乘起来，得到总的传输矩阵，可以使分析电路的工作简化.

以图 6-4 为例，把两个电阻组成的分压电路分成两个串接的子网络. 第一个子网络只包含电阻 R_1，第二个子网络只包含电阻 R_2，列出第一个子网络的电路方程为

$$i_2 = i_1 \quad u_2 = u_1 - iR_1$$

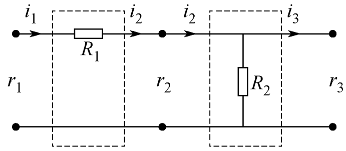


图 6-4　两个子网络串联模型

写成矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

同样可以列出第二个子网络的电路方程

$$i_3 = i_2 - u_2/R_2 \qquad u_3 = u_2$$

写成矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_2 \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

从上分别得到两个子网络的传输矩阵：

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix}$$

整个电路的传输矩阵为两者的乘积：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+R_1/R_2 & -R_1 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix}$$

三、行业就业人数预测

例题 4　问题提出[见本模块第一节]

问题解决　若用三维向量 $(x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$ 表示第 i 年后从事这三种职业的人员总数，则已知 $(x_0, y_0, z_0)^{\mathrm{T}} = (15,9,6)^{\mathrm{T}}$，而欲求 $(x_1, y_1, z_1)^{\mathrm{T}}$，$(x_2, y_2, z_2)^{\mathrm{T}}$，...，并考察 $n\to\infty$ 时 $(x_n, y_n, z_n)^{\mathrm{T}}$ 的发展趋势.

依题意，一年后，从事农、工、商的人员总数应为

$$\begin{cases} x_1 = 0.7x_0 + 0.2y_0 + 0.1z_0 \\ y_1 = 0.2x_0 + 0.7y_0 + 0.1z_0 \\ z_1 = 0.1x_0 + 0.1y_0 + 0.8z_0 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

进而推导得

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

即 n 年之后从事各业的人数完全由 $\boldsymbol{A}^n$ 决定，事实上，利用实对称矩阵的正交对角化方法，可以轻松求得 $\boldsymbol{A}^n$.

案例评价：本案例利用矩阵与向量的乘法很轻松地解决了看上去比较复杂的问题.

四、企业管理问题

1．员工培训问题

问题提出　某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐．新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工．假设第一年一月份统计的熟练工和非熟练工各占一半，求以后每年一月份统计的熟练工和非熟练工所占的百分比.

【分析】设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占的百分比分别为 x_n， y_n，记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$．因为第一年统计的熟练工和非熟练工各占一半，所以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

为了求以后每年一月份统计的熟练工和非熟练工所占的百分比，先求从第二年起每年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比与上一年度统计的百分比之间的关系，即求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式，然后再根据这个关系式求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

问题解决　根据已知条件有

$$x_{n+1} = (1 - \frac{1}{6})x_n + \frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n) = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n$$

$$y_{n+1} = (1 - \frac{2}{5})(\frac{1}{6}x_n + y_n) = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n$$

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^2\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=\boldsymbol{A}_n\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{9}{10} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{10} & \lambda-\frac{3}{5}\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})$$

由此可得 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\frac{1}{2}$.

解 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$ 得对应于 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量 $\zeta_1=(4,1)^T$，

解 $(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$ 得对应于 $\lambda_2=\frac{1}{2}$ 的一个特征向量 $\zeta_2=(-1,1)^T$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1})^n=\boldsymbol{P}\Lambda^n\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=(\frac{4-3\times2^{-n-1}}{5},\frac{1+3\times2^{-n-1}}{5})^T$$

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{4-3\times2^{-n-1}}{5}\to\frac{4}{5}$，$\frac{1+3\times2^{-n-1}}{5}\to\frac{1}{5}$. 这意味着，随着 n 的增加，熟练工和非熟练工所占的百分比趋于稳定，分别趋于 80% 和 20%.

2. 成本计算问题

问题提出　某厂生产甲、乙、丙三种产品，每件成品需要由三种零件构成，每件产品的成本（单位：万元）及每季度生产件数见表 1 和表 2. 试提供该厂每季度在每种产品上的成本表.

表 1

零件＼成品	甲	乙	丙
零件 1	0.10	0.30	0.15
零件 2	0.30	0.40	0.25
零件 3	0.10	0.20	0.15

表 2

季度 产量/件	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
产量甲	4000	4500	4500	4000
产量乙	2000	2800	2400	2200
产量丙	5800	6200	6000	6000

分析：用 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0.10 & 0.30 & 0.15\\ 0.30 & 0.40 & 0.25\\ 0.10 & 0.20 & 0.15\end{bmatrix}$ 表示成本矩阵，用 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}4000 & 4500 & 4500 & 4000\\ 2000 & 2800 & 2400 & 2200\\ 5800 & 6200 & 6000 & 6000\end{bmatrix}$ 表示季度产量矩阵，将成本矩阵与季度产量矩阵相乘所得的矩阵即为所求.

问题解决

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{MP}=\begin{bmatrix}1870 & 2220 & 2070 & 1960\\ 3450 & 4020 & 3810 & 3580\\ 1670 & 1940 & 1830 & 1740\end{bmatrix}$$

3．产品配方问题

问题提出　一种产品由 4 种原料 A，B，C，D 混合而成．这种产品现有两种规格，这两种规格的产品中，4 种原料的配比分别为 2:3:1:1 和 1:2:1:2．现在需要 4 种原料的配比为 4:7:3:5 的第三种规格的产品．问：第三种规格的产品能否由前两种规格的产品按一定比例配制而成.

分析

（1）假设四种原料混合在一起是不发生化学变化.

（2）假设四种原料的配比是按质量计算的.

（3）假设前两种规格的产品分别装成袋．假如第一种规格产品的净质量为 7kg，第二种规格产品的净质量为 6kg.

问题解决

根据已知数据和上述假设，可进一步将 x 袋第一规格的产品与 y 袋第二种规格的产品混合在一起，得到的混合物中 A，B，C，D 四种原料分别为 4g，7g，3g，5g，则有以下线性方程组

$$\begin{cases}2x+y=4\\ 3x+2y=7\\ x+y=3\\ x+2y=5\end{cases}$$

上述线性方程组的增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 7\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

求得 $x=1$，$y=2$．又因为第一种规格的产品每袋净质量为 7g，第二种规格的产品每

袋净重 6g，所以第三种规格的产品能由前两种规格的产品按 7:12 的比例配制而成.

习题 6-13

一、填空题

1．若线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$有非零解，则 $\lambda =$_________.

2．齐次线性方程组 $AX = 0$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则此方程组的一般解为_________.

3．线性方程组 $AX = b$ 的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化成阶梯形矩阵后为

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d+1 \end{bmatrix}$$

则当 $d =$_______时，方程组 $AX = b$ 有无穷多解.

二、选择题

1．设线性方程组 $AX = B$ 的增广矩阵通过初等行变换化为$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则此线性方程组的一般解中自由未知量的个数为（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$解的情况是（　　）.

A．无解　　B．只有零解　　C．有唯一解　　D．有无穷多解

3．若线性方程组的增广矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则当 $\lambda =$（　　）时线性方程组无解.

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．0　　C．1　　D．2

4．线性方程组 $AX = 0$ 只有零解，则 $AX = B(B \neq 0)$（　　）.

A．有唯一解　　B．可能无解　　C．有无穷多；　　D．无解

5．设线性方程组 $AX = B$ 中，若 $r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 4, r(\boldsymbol{A}) = 3$，则该线性方程组（　　）.

A．有唯一解　　B．无解　　C．有非零解　　D．有无穷多解

6．设线性方程组 $AX = B(B \neq 0)$ 有唯一解，则相应的齐次方程组 $AX = 0$（　　）.

A．无解　　B．有非零解　　C．只有零解　　D．解不能确定

7．当 $\lambda =$（　　），下面方程组有唯一解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 1 \\ 2x_2 - x_3 = \lambda - 2 \\ \lambda(\lambda-3)(\lambda-1)x_3 = -(\lambda-3) \end{cases}$$

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 1

8．当 $\lambda =$（　　），下面方程组有无穷多解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = \lambda - 1 \\ 3x_2 - x_3 = \lambda - 2 \\ \lambda x_2 - x_3 = (\lambda-3)(\lambda-4) + (\lambda-2) \end{cases}$$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9．当 $\lambda =$（　　），下面方程组无解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ (\lambda-2)x_3 = (\lambda-3)(\lambda-4) \end{cases}$$

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10．齐次线性方程组 $AX = 0$ 是线性方程组 $AX = B$ 的导出组，则（　　）

A． $AX = 0$ 有零解时， $AX = B$ 有唯一解

B． $AX = 0$ 有非零解时， $AX = B$ 有无穷多解

C． u 是 $AX = 0$ 的通解， x_0 是 $AX = B$ 的特解时， $x_0 + u$ 是 $AX = B$ 的通解

D． v_1, v_2 是 $AX = 0$ 的解时， $v_1 - v_2$ 是 $AX = B$ 的解

三、计算题

1．判断下列线性方程组解的情况.

（1）$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 5x_1 - 3x_3 = 7 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 - x_3 = 7 \end{cases}$

2．设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ ，求其系数矩阵和增广矩阵的秩，并判断其解的情况.

【数学思想与数学方法】　　数学方法、数学思想及其社会意义

1．数学思想

（1）思想是客观存在的反映在人的意识中的、经过人的思维活动而产生的结果.

（2）数学思想是指客观世界的空间形式以及数量关系反映到人的意识中并经过思维活

动而产生的结果；它是对数学事实和数学本质的认识，是从某些具体的数学内容和对数学的认识过程中提炼上升的数学观点；它在认识活动中被反复运用，带有普遍的指导意义，是建立和运用数学工具解决问题的指导思想.

（3）主要的数学思想有：符号与变元思想、函数与方程思想、数形结合思想、化归与转化思想、整体思想、分类讨论思想、公理化思想、抽样统计思想、极限思想等.

2. 数学方法

（1）方法

方法源于希腊文，原意是“遵循某一路”，这里的“方法”是为达到某种目的而采取的手段、途经和行为方式中所包含的可操作的行为规则或者步骤等．人们在日常生活中遇到许多问题是可以用数学作为解决问题的手段或步骤，这样的手段或者步骤用的次数多了，就形成了数学方法.

（2）数学方法

所谓数学方法是人们解决数学问题的步骤、程序和格式，是实施有关数学思想的技术手段．郑毓信在其所著的《数学方法论》中所阐述的“把事物的状态、关系和过程用数学语言表达出来，进行推导、演算和分析，以形成对问题的解释、判断和预言”的数学方法主要理解为用数学工具去解决实际问题的数学模型方法，实际上数学方法在适用范围上要更广泛于数学模型方法．数学方法在运用时具有过程性、层次性和可操作性的特点.

3. 数学思想和数学方法的关系

数学思想和数学方法既有区别也有联系，其区别表现在数学思想是分析、处理和解决数学问题的根本想法，是对数学规律的理性认识，是数学方法的理论基础和内在精神实质，具有概括性和普遍性．而数学方法是以数学事实和理论为工具进行探究的手段，这些手段与人们的数学知识、经验以及数学思想掌握情况密切相关，是数学思想的外在表现形式，具有可操作性和具体性，两者互为表里、密切联系.

思想比方法更深刻、更抽象的反映数学对象之间的内在联系，是方法的进一步概括和升华，其联系表现在思想和方法都是思维活动的载体，利用数学方法解决问题的过程就是感性不断积累的过程，当这种积累达到一定程度就会产生飞跃，上升为数学思想，一旦数学思想形成之后，便对数学方法起着指导作用．数学思想都是通过某种方法来体现，而任何一种数学方法都反映了一定的数学思想．因此，无论从理论上还是应用中，我们对数学思想与数学方法是不做区分的，统称为数学思想方法.

4. 数学知识与数学思想的关系

数学知识主要指数学语言、概念、定理、法则和范例．数学思想方法是数学的灵魂，在促进学生的发展中具有决定性的作用．数学思想方法、数学观念的获得，是数学知识获取过程的最高境界．数学思想是数学中处理问题的基本观点，是对数学基础知识与基本方法的本质概括，**是数学知识中深层次的、隐性的知识**．数学思想方法以数学知识为载体，思想方法以数学知识来表现，知识的形成又是思想方法运用的结果，数学思想方法把数学知识中孤立的、零散的东西联系起来，它是数学的内在本质，是获取数学知识、发展思维能力的强力工具．数学知识是定型的、静态的，而思想方法是发展的、动态的；知识的记忆是暂时的，思想方法的掌握是永久的；知识只能使学生受益一时，而思想方法使学生受益终生．只有将两者有机结合地起来，才能让学生学好知识，形成优化的知识结构，进而

增强学生的数学观念，提高学生的数学素养.

数学思想方法作为思维方式和行为方式，具有很大的智力价值，学生一旦把它们转化为自己的思维与行为方式，就相当于掌握了获取数学知识的重要手段，便能更加透彻地理解数学思想，并能自我生成数学知识．因此，数学思想方法和数学观念的获取是培养学生的创造精神和创造能力的有效途径.

5．数学思想的社会意义

一个人不管将来从事何种职业，思维能力都可以说是无形的资本，而数学恰恰是锻炼思维能力的“体操”．这正是为什么数学会成为每个受教育的人一生中需要学习时间最长的学科之一，这并不是说我们在学校中学过的每一个具体的数学知识点都会在日后的生活与工作中派上用处，数学对一个人终身发展的影响主要在于思维方式．以欧几里得几何为例，我们在学校里学过的大多数几何定理日后大概很少直接使用甚至基本不用，但欧式几何严格的演绎思想和推理方法却在造就各行各业的精英人才方面有着毋庸否定的意义．事实上，从牛顿的《自然哲学的数学原理》到爱因斯坦的相对论著作，从法国大革命的《人权宣言》到马克思的《资本论》，乃至现代诺贝尔经济学奖得主们的论著中，我们不难看到欧几里得几何的身影．另一方面，数学的定量化思想更是以空前的广度与深度向人类几乎所有的知识领域渗透．如，第一台电子计算机（ENIAC）在制成之初，由于计算速度的提高与人工编制程序的迟缓之间的尖锐矛盾而陷于夭折，在这一关键时刻，数学家冯 · 诺依曼提出的“程序内存”概念拯救了人类这一伟大的技术发明．直到今天，计算机设计的基本原理仍然遵循冯 · 诺依曼的主要思想，他被尊为“现代计算机之父”，这就是说，数学家的数学思想是全社会的财富.

数学的传播与普及，除了具体的数学知识的传播与普及，更实质的是数学思想的传播与普及．在科学技术日益数学化的今天，已越来越成为一种社会需要了.

数学实验六　Mathematica 在求解行列式中的应用

【实验目的】

用 Mathematica 求解行列式的值.

【实验内容】

1．计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 6 \end{vmatrix}$的值.

Mathematica 语句如下：

```
{{2,5,8}, {0,1,2}, {7,8,6}}
det[%]
```

运行结果如下：

```
{{2,5,8}, {0,1,2}, {7,8,6}}
-6
```

2. 计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2 \\ x & 1 & 6 \end{vmatrix}$的值.

Mathematica 语句如下：

```
{{2,0,x}, {0,1,2}, {x,1,6}};
MatrixForm[%];
det[%]
```

运行结果如下：

```
8-x^2
```

第七模块　概论统计初步

一门开始于研究赌博机会的科学，居然成了人类知识中最重要的科学，这无疑是令人惊讶的事情.

——P.S.拉普拉斯（法国著名数学家、天文学家，1749—1827）

【本模块概述】

在微积分与线性代数中，许多数学问题和案例都存在这样一个特征：只要有足够的相关信息，就能得到确定的结果.

但在我们生活的世界，是确定的还是不确定的？自古至今，人们一直试图回答这个哲学命题. 一方面我们确信，苹果熟透后会从树上掉下来；另一方面我们又无法确信抛弃的硬币落到地上时，哪一面会朝上.

在自然科学和经济领域中的许多问题，即使我们彻底研究了目前所获得的信息，未来的不确定性也一定存在.

因此，我们不仅关注某些不确定现象（随机现象），而且希望确定该随机现象的可能性大小，即本模块的核心问题：随机事件和随机事件的概率.

随机变量的概念建立在随机事件的基础上. 受偶然因素的影响，随机事件可以取不同的可能数值. 因此随机事件可以数量化，即产生了随机变量的概念，由此随机事件可以用随机变量的取值来表示；同时把随机事件出现的概率，用随机变量取某个值或某个确定范围内的值的概率来确定. 在概率论中引入变量的思想，引入随机变量及其相关概念，使之逐渐成为描述随机现象的主要工具. 随机事件是从静态的观点来研究随机现象，而随机变量是从动态来研究.

基本要求：理解概率的定义、性质、事件之间的关系与基本运算，会用古典概型、加法公式、条件概率公式、伯努利概型计算概率；理解几种重要随机变量及其密度函数的概念与性质；掌握数学期望与方差的性质与计算；熟悉概率统计在机械、电工及企业管理等方面的应用.

第一节　概率论的起源与应用

一、概率论的起源

每年都会有三千多万人聚集到美国内华达沙漠中央的一个小镇. 他们这趟旅行的目的——这也是拉斯维加斯这座城市不是一个寂静、充满灰尘的小村庄的原因——赌博. 在今日美国，赌博是个 400 多亿美元的生意，而且它增长的速度几乎比其他所有企业都快. 经由概率的模式，赌场确保它们可以在每一美元的赌注上平均赚三分钱. 而结果呢？就是它们每年高达 160 亿美元的利润. 我们很难想象这个赌博行业，是由两个法国数学家在 17 世纪中期通过一系列通信交流而产生的.

按数学的术语来说，这两个法国人建立了今天的概率论——一个研究概率模式的数学分支.

三四百年前，在欧洲许多国家盛行赌博之风，掷骰子是他们常用的一种赌博方式．因骰子的形状为小正方体，当它被掷到桌面上时，每个面朝上的可能性是相等的，即出现 1 点至 6 点中任何一个点数的可能性是相等的，有的参赌者想：如果同时掷两颗骰子，则点数之和为 9 与点数之和为 10，哪种情况出现的可能性较大？

17 世纪中叶，法国一位热衷于掷骰子游戏的贵族德 · 梅耳，发现了这样的事实：将一枚骰子连掷 4 次，至少出现一个 6 点的机会较多，而将两玫骰子连掷 4 次，至少出现一次双 6 的机会却很少．后人称之为德 · 梅耳问题．

又有人提出了“ 分赌注问题 ”:两人决定赌若干局，事先约定谁先赢得 6 局便算赢家．如果在一个人赢 3 局，另一个人赢 4 局时因故终止赌博，赌本该如何分配？

贵族们提出了不少诸如此类需要计算可能性大小的赌博问题，但他们无法给出答案．贵族将他们遇到的问题请教当时法国数学家帕斯卡（1623—1662），帕斯卡接受了这些问题，但他没有立即回答，而转交给另一位法国数学家费马（1601—1665）．他们频频通信，互相交流，围绕着赌博中的数学问题开始了深入细致的研究．这些问题后来被来到巴黎的荷兰科学家惠更斯（1629—1695）获悉，回到荷兰后，他独立地进行研究．

帕斯卡和费马一边亲自做赌博实验，一边仔细分析计算赌博中出现的各种问题，终于完整地解决了“ 分赌注问题 ”，并将此题的解法向更一般的推广，从而建立了概率论的一个基本概念 —— 数学期望，这是描述随机变量取值的平均水平的一个量．而惠更斯经过多年的潜心研究，解决了掷骰子中的一些数学问题．1667 年，他将自己的研究成果写成了专著《论掷骰子游戏中的计算》，迄今为止，这本书被认为是概率论中最早的论著．

可以说，早期概率论的创立者是帕斯卡、高斯和惠更斯，这一时期被称为组合概率时期，主要研究各种古典概率．

二、概率论的应用

目前，概率论与以它作为基础的数理统计学科一起，在自然科学、社会科学、工程技术、军事科学及工农业生产等诸多领域中起着不可或缺的作用．

直观地说，卫星上天、导弹巡航、飞机制造、宇宙飞船遨游太空等都有概率论的一部分功劳；及时准确的天气预报、海洋探险、考古研究等更离不开概率论与数理统计；电子技术的发展、影视文化的进步、人口普查及教育等跟概率论与数理统计也是密不可分的．

根据概率论中用投针实验估计 π 值的思想所产生的蒙特卡罗方法，是一种建立在概率论与数理统计基础上的计算方法，借助于计算机这一工具，这种方法在核物理、表面物理、电子学、生物学、高分子化学等学科的研究中起着重要的作用．

概率论作为理论严谨、应用广泛的数学分支正日益受到人们的重视，并随着科学技术的发展而得到发展．

1．电路的可靠性[独立性应用，答案见本模块第九节]

在由多个电子元件组成的电路系统中，每一个电子元件的损坏情况对整个电路系统会有怎样的影响？这是系统的可靠性问题．

问题提出　设由 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 五个相同的元件组成如图 7-1 所示的电路系统，设每一元件能正常工作的概率为 P，且各元件损坏与否是相互独立的，问此系统能正常工作的概率是多少？

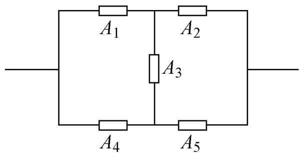


图 7-1

2. 汽车车门高度设计问题 [正态分布的应用，答案见本模块第九节]

正态分布是现实世界里最常见的一种概率分布，有很多的应用．一般情况下，像某个地区人群的身高、体重，某次考试的成绩，一批灯泡的使用寿命等都可以近似看做正态分布．

问题提出　汽车设计手册指出：人的身高（单位：m）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$．假设某地区 $\mu=1.75$，$\sigma=0.05$．现在某汽车厂为该地区生产一批公交车，要求上下车时发生碰头的概率不超过 0.5%，那么车门应设计多高合适？

3. 维修人员的最佳配置问题 [泊松定理或二项分布的应用，答案见本模块第九节]

在某车间有多台设备，当设备发生故障时，必须及时得到维修才能保证生产活动的正常开展，为此需要配备一定的维修人员．问：这些维修人员如何配置，才能保证车间的生产能够正常开展？

问题提出　设某车间有 80 台同类型设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01，且一台设备的故障由一人处理．考虑两种配备维修工人的方法，其一是由 4 人维护，每人负责 20 台；其二是由 3 人共同维护 80 台．试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小．

第二节　随机事件

学习内容：随机现象，随机试验，随机事件的概念，随机事件的关系与运算．

目的要求：理解随机事件的定义，会判断各种随机事件，掌握随机事件的关系与运算．

重点难点：随机事件的定义，随机事件的关系与运算．

一、随机现象

在自然界和人类的活动中，经常遇到各种各样的现象，例如：

（1）某人射击一次，可能会命中 10 环，9 环，……，0 环．

（2）掷一枚质地均匀骰子，可能出现的点数为 1 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点．

（3）重物在高处失去支撑的情况下必然会垂直落到地面．

这三种现象中，（1）和（2）有多种可能结果，事前不能确定哪种结果会发生；（3）却只有确定的一种结果，故称（1）和（2）为随机现象，（3）为必然现象．所有各种现象也都可大致归为这两类．

随机现象：在一定条件下，有多种可能结果，且事前不能确定哪种结果会出现的现象．

必然现象：在一定条件下，必然会出现某种结果的现象．

实践经验告诉我们，当对一随机现象进行大量重复观察时，其各种可能结果的发生会呈现出一定的规律，我们称之为统计规律性．例如，将一枚质地均匀的硬币反复抛掷多次，

就会发现出现正面的次数和出现反面的次数大约各占一半.

二、随机试验与随机事件

在科学研究和社会生活中，常常要在一组给定条件下进行实验或观察，统称实验或观察为试验. 要研究随机现象的统计规律性，就得通过试验来观察随机现象.

如果一个试验具有下列三个特性，就称这个试验是**随机试验**，简称**试验**，记作 E .

（1）**可重复性**　试验可以在相同条件下大量重复进行；

（2）**明确性**　每次试验结果可能不止一个，但在试验之前已知所有的可能结果；

（3）**随机性**　在一次试验中，某种结果出现与否是不确定的，在试验之前无法准确地预言哪一个结果会出现.

通过研究随机试验可以来研究随机现象.

例题 1　下面几种试验都是随机试验：

（1）掷一颗骰子，观察出现的点数；

（2）记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数；

（3）记录车站售票处一天内售出的车票数.

以上 3 个例子都是满足随机试验的三个特性的，所以它们都是随机试验.

对于一个试验 E ，虽然在一次试验之前试验结果不能肯定，但试验的一切可能结果是已知的，我们定义：

随机试验 E 的所有可能的试验结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记作 Ω . 样本空间的元素（即试验 E 的每个可能结果）称为**样本点**，记作 ω .

例题 2　写出例题 1 中几个随机试验的样本空间：

（1） $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ ；

（2） $\Omega_2 = \{0,1,2,3,4,\cdots\}$ ；

（3） $\Omega_3 = \{0,1,2,3,\cdots,n\}$ ，这里的 n 表示售票处一天内准备出售的车票.

试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**，记作 $A,B,C,D\cdots$. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，就称这一事件发生.

由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 例如，例题 1 中（2）有 6 个基本事件 $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$. 由若干基本事件组合而成的事件称为**复合事件**. 例题 1 中（2）即是复合事件.

对于一个试验 E，在每次试验中必然发生的事件，称为**必然事件**；在每次试验中都不发生的事情，称为**不可能事件**. 例如在例题 1（1）中，{掷出的点数不超过 6 点} 是必然事件，若用试验结果的集合来表示，这一事件就是该试验样本空间 $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$. 而事件 {掷出的点数小于 1 点} 是不可能事件，这个事件不包含该试验的任何一个可能结果，故我们用空集的记号 $\varnothing$ 表示不可能事件.

一般地，对于试验 E，包含它的所有可能结果的试验样本空间 Ω 是必然事件；不包含它的任何一个试验结果的事件 $\varnothing$ 是不可能事件. 今后我们就用 Ω 表示必然事件，用 $\varnothing$ 表示不可能事件.

三、事件之间的关系与运算

对于试验 E，不可能事件是 $\varnothing$，必然事件是样本空间 Ω 本身，事件 A 是样本空间 Ω 的子集，于是事件的关系和运算就可以用集合论的知识来解释．下面，在讨论两个事件之间的关系和对若干个事件进行运算时，均假定它们是同一个随机试验下的随机事件．

1．事件的包含与相等

两个事件 A 和 B，若事件 A 发生导致事件 B 发生，称**事件 B 包含事件 A**，或者**事件 A 包含于事件 B**，记作 $B \supset A$，或者 $A \subset B$．用集合论的术语来表达，即，$\forall \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$．图 7-2 直观地描绘了事件 B 包含事件 A．

例题 3　一批零件中有合格零件与不合格零件，合格零件中有一、二、三等品，从中随机抽取一件，是合格品记作 A，是一等品记作 B，显然 B 发生时 A 一定发生，因此 $B \subset A$．

若事件 A 发生导致事件 B 发生，事件 B 发生也导致事件 A 发生，即 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则事件 A 和 B 相等，记作 $A = B$．

例题 4　在掷骰子的试验中，记 $A = \{掷出点数为2或4或6\}$，$B = \{掷出点数为2的倍数\}$，这两个事件表面上看起来是不同的两种说法，其实表示了同一件事，因而 $A = B$．

2．事件的和

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件，称之为事件 A 与事件 B 的**和（并）**，记作 $A + B$ 或 $A \cup B$．用集合论的术语来表达，即

$$A \cup B = \{A, B至少一个发生\}.$$

图 7-3 给出和事件 $A \cup B$ 的直观表示．

例题 5　在 20 件样品中，有 18 件正品，2 件次品，从中任意取 2 件，记作 $A_1 = \{恰有1件次品\}$，$A_2 = \{恰有2件次品\}$，$B = \{至少有1件次品\}$．

由于 $B = \{至少有1件次品\}$ 的含义是所取出的 2 件产品中，或者是 $A_1 = \{恰有1件次品\}$，或者是 $A_2 = \{恰有2件次品\}$，二者必有一发生，因此 $B = A_1 + A_2$．

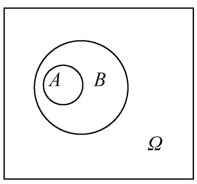


图 7-2

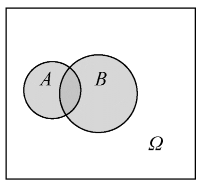


图 7-3

3．事件的积

事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**积**，记作 AB 或 $A \cap B$．用集合论的术语来表达，即 $A \cap B = \{A,\ B同时发生\}$．图 7-4 给出积事件的直观表达，有时也把事件的积称为事件的交．

例题 6　设 $A = \{甲厂生产的产品\}$，$B = \{合格品\}$，$C = \{甲厂生产的合格品\}$，则，$C = AB$．

根据事件积的定义可知，对任一事件 A，有

$$A\Omega = A，\quad A\varnothing = \varnothing$$

4. **事件的差**

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**差**，记作 $A-B$．用集合论的术语来达，即 $A-B=\{A发生，B不发生\}$．图 7-5 给出差事件的直观表达.

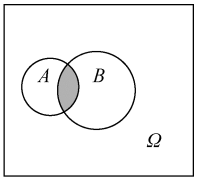


图 7-4

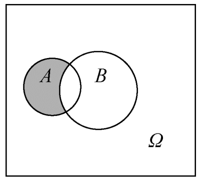


图 7-5

例题 7 设 $A=\{甲厂生产的产品\}$，$C=\{甲厂生产的合格品\}$，$D=\{甲厂生产的不合格品\}$，则 $D=A-C$．

5. **互斥事件（不相容事件）**

若事件 A 与事件 B 在一次试验中不同时发生，则称事件 A 与 B 是互不相容（或互斥）．图 7-6 给出互斥事件的直观表达.

例题 8 掷一颗一枚硬币，设 $A=\{正面向上\}$，$B=\{反面向上\}$，则事件 A 与事件 B 是互斥的，即 $A\cap B=\varnothing$．

6. **互逆事件（或对立事件）**

若在一次随机试验中，事件 A 与 B 必有一个事件且仅有一个事件发生，则称事件 A 与 B 是**互逆事件**（或**对立事件**），记作 $A=\overline{B}$．用集合论的术语来表达，即 $A=\overline{B}=\{B不发生\}$．图 7-7 给出互逆事件的直观表达．显然，如果事件 A 与 B 互逆，则事件 B 也是 A 的逆事件（或对立事件），记作 $B=\overline{A}$．

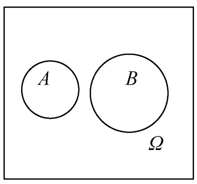


图 7-6

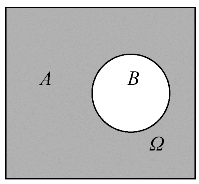


图 7-7

例题 9 在 20 件样品中，有 8 件正品，2 件次品，从中任取 2 件，设 $A=\{恰有2件次品\}$，$B=\{至多1件次品\}$，则 $B=\overline{A}$．

根据互逆事件定义可知，若事件 A 与事件 B 互逆，则有 $A+B=\Omega, A\cap B=\varnothing$．对任意事件 A，B 也可得如下结论：

（1）$A-B=A\overline{B}$．

（2）$\overline{\overline{A}}=A$．

注：互逆与互斥是不同的概念，互逆必互斥，但互斥不一定互逆.

根据以上事件的 6 种关系，在进行运算时，经常要用到下述定律.

设有事件 A，B，C，则有

交换律　$A+B=B+A$，$AB=BA$；

结合律　$(A+B)+C=A+(B+C),(AB)C=A(BC)$；

分配律　$(A+B)C=AC+BC,(AB)+C=(A+C)(B+C)$；

德·摩根律　$\overline{(AB)}=\overline{A}+\overline{B}$，$\overline{(A+B)}=\overline{A}\overline{B}$.

例题 10　以直径和长度为衡量一种零件是否合格的指标，规定两项指标中有一项不合格则认为此零件不合格．设 $A=\{$零件直径合格$\}$，$B=\{$零件长度合格$\}$，$C=\{$零件合格$\}$，则

$$\overline{A}=\{\text{零件直径不合格}\}\ \overline{B}=\{\text{零件长度不合格}\}\ \overline{C}=\{\text{零件不合格}\}$$

于是　$C=AB,\overline{C}=\overline{A}+\overline{B}$　即有　$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

习题 7-2

1．指出下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件.

（1）某地 1 月 1 日刮西北风；

（2）当 x 是实数时，$x^2\geq 0$；

（3）手电筒的电池没电，灯泡发亮；

（4）一个电影院某天的上座率超过 50%.

2．指出下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件.

（1）抛一石块，下落；

（2）在标准大气压下且温度低于 0℃时，冰融化；

（3）某人射击一次，中靶；

（4）如果 $a>b$，那么 $a-b>0$；

（5）掷一枚硬币，出现正面；

（6）导体通电后，发热；

（7）从分别标有号数 1，2，3，4，5 的 5 张标签中任取一张，得到 4 号签；

（8）某电话机在 1 分钟内收到 2 次呼叫；

（9）没有水分，种子能发芽；

（10）在常温下，焊锡熔化.

3．向制定的目标射击三枪，以 A_1,A_2,A_3 表示事件“第一、二、三枪击中目标”，试用 A_1,A_2,A_3 表示以下事件.

（1）只击中第一枪；（2）只击中一枪；（3）三枪都未击中；（4）至少击中一枪.

4．掷一颗均匀的骰子，观察出现点数，设事件 $A=\{$点数是2,3或4$\}$，$B=\{$不小于4的点数$\}$，$C=\{$点数小于3$\}$，$D=\{$点数为奇数$\}$，$E=\{$点数为偶数$\}$．试问：

（1）哪些事件是对立事件？哪些事件是互不相容事件？

（2）$\overline{A}B$，$\overline{A}\cup B$，$AB\overline{C}$，$\overline{A}C$，$A\cup E$ 分别表示什么事件？

第三节　概率的统计定义与性质

学习内容：频率、概率的定义，古典概率、几何概率、概率的性质.
目的要求：理解频率、概率、古典概率、几何概率的定义，掌握概率性质的应用.
重点难点：概率、古典概率、几何概率定义的理解与概率的性质应用.
【案例】
抛掷硬币试验结果表，见表 7-1.

表 7-1

抛掷次数/n	正面朝上次数/m	占总次数的比值/（m/n）
2048	1061	0.5181
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005
30000	14984	0.4996
72088	36124	0.5011

当抛掷次数很多时，出现正面的次数占总次数的比值是稳定的，接近于常数 0.5，并在它附近摆动.

一、概率的定义

若在同一条件下将试验 E 重复 N 次, 事件 A 发生了 m 次, 则称比值 $\dfrac{m}{N}$ 为事件 A 在 N 次重复试验中发生的**频率**，记为 $f_N(A)$，即

$$f_N(A)=\frac{m}{N} \tag{1}$$

人们在实践中发现，当重复试验次数 N 较大时，事件发生的频率往往可以大致反映事件发生的可能性的大小. 为了解决一般场合下概率的定义与计算问题，历史上许多人做了大量的实验来研究频率，如表 7-1 记录了部分投掷硬币的实验结果，发现频率具有稳定性：当 N 很大时，频率值 $f_N(A)$ 会在某个常值附近摆动，而随着试验次数 N 的增大，这种摆动幅度会越来越小，且越来越接近 0.5 这个常数，这个常值就是概率.

在一个随机试验中，如果随着试验次数的增大，事件 A 出现的频率 $\dfrac{m}{N}$ 在某个常数 p 附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)=p$，此概率称为**统计概率**.

例题 1　对某电风扇厂生产的电风扇进行抽样检测的数据见表 7-2.

表 7-2

抽取台数	50	100	200	300	500	1000
优等品数	45	93	192	285	478	954

（1）计算表中优等品的各个频率；

（2）该厂生产的电风扇优等品的概率是多少？

解

（1）抽样台数为 50 时，频率 $f_{50}(A)=\dfrac{45}{50}=0.900$ ；

抽样台数为 100 时，频率 $f_{100}(A)=\dfrac{93}{100}=0.930$ ；

抽样台数为 200 时，频率 $f_{200}(A)=\dfrac{192}{200}=0.960$ ；

抽样台数为 300 时，频率 $f_{300}(A)=\dfrac{285}{300}=0.95$ ；

抽样台数为 500 时，频率 $f_{500}(A)=\dfrac{478}{500}=0.956$ ；

抽样台数为 1000 时，频率 $f_{1000}(A)=\dfrac{954}{1000}=0.954$.

（2）厂生产的电风扇优等品的概率 $P(A)=0.95$.

二、古典概率

若试验 E 具有如下两个特征：

（1）有限性　E 的样本空间 Ω 只含有有限个元素 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ ；

（2）等可能性　E 的各基本事件 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$ 出现的可能性相等.

则称 E 为**古典型随机试验**（**或古典概型**）.

例如“ 投掷硬币 ”“ 掷骰子 ”等试验就具备以上两个条件，所以属于古典概型.

根据古典概型的特点，我们可以定义任一随机事件 A 的概率.

如果古典概型中的所有基本事件的个数是 n ，事件 A 包含的基本事件的个数是 m ，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件的个数}}{\text{所有基本事件的个数}}$$

并称此概率为**古典概率**.

例题 2　投掷一枚均匀的骰子，用 A 表示出现的点数小于 3 的事件，求事件 A 发生的概率.

解　因为样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ ，所以

$$n=6$$

又由于 $A=\{1,2\}$ ，故 $m=2$ ，所以根据古典概率的计算公式，有

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

例题 3　设盒子中有 8 个球，其中红球 3 个，白球 5 个.

(1) 若从中随机取出 1 球，$A=\{\text{取出的是红球}\}$ ，$B=\{\text{取出的是白球}\}$ ，求 $P(A),P(B)$ ；

(2) 若从中随机取出 2 球，$C=\{\text{两个都是白球}\}$ ，$D=\{\text{一红一白}\}$ ，求 $P(C),P(D)$ ；

(3) 若从中随机取出 5 球，$E=\{\text{取到的5个球恰有2个白球}\}$ ，求 $P(E)$.

解（1）从 8 个球中随机取出 1 个球，取出方式有 C_8^1 种，即基本事件的总数为 C_8^1，事件 A 包含的基本事件的个数为 C_3^1，事件 B 包含的基本事件的个数为 C_5^1，故

$$P(A)=\frac{C_3^1}{C_8^1}=\frac{3}{8}，\quad P(B)=\frac{C_5^1}{C_8^1}=\frac{5}{8}$$

（2）从 8 个球中随机取出 2 球，基本事件的总数为 C_8^2，取出{两个都是白球}包含的基本事件的个数为 C_5^2，故

$$P(C)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5\times 4}{2\times 1}\cdot\frac{2\times 1}{8\times 7}\approx 0.357$$

取出{一红一白}包含的基本事件的个数为 $C_3^1C_5^1$，故

$$P(D)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{3\times 5\times 2\times 1}{8\times 7}\approx 0.536$$

（3）从 8 个球中任取 5 个球，基本事件的总数为 C_8^5，取到的{5 个球中恰有 2 个白球}包含的基本事件的个数为 $C_3^3C_5^2$，因此

$$P(E)=\frac{C_3^3C_5^2}{C_8^5}=\frac{1\times 5\times 4}{2\times 1}\cdot\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{8\times 7\times 6\times 5\times 4}\approx 0.179$$

三、几何概率

古典概型假设的试验结果是有限个，这限制了它的适用范围，将这种做法推广到无限多结果而又有保留等可能性，对这一问题的研究便产生了概率的几何定义.

设试验 E 的样本空间 Ω 为某一区域，且其任一基本事件的发生具有等可能性，则称 E 为**几何型随机试验（或几何概型）**.

可见几何概型与古典概型一样具有“**等可能性**”，但其样本空间含无限多样本点且形成一个几何区域. 基于“等可能性”，古典概率被定义为“部分”比“全体”. 那么，对于几何概型，如果我们能够度量其“部分”与“全体”，其事件的概率也应定义为二者之比.

若几何型随机试验 E 的事件 A 的度量大小为 $\mu(A)$，E 的样本空间 Ω 的度量大小为 $\mu(\Omega)$，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

并称此概率为**几何概率**.

由于几何概型的特点，任一具体的几何概型问题都可以看做是向一有界区域 Ω 随机投一点，因而求几何概率的关键是确定该问题样本空间所成的几何区域以及有利于事件 A 的样本点所成的子区域.

【蒲丰投针问题】

蒲丰投针实验是运用实验法研究几何概率的典型范例. 1777 年，法国科学家蒲丰（C.Buffon，1707—1788）邀请许多宾朋到家做客，并参观他的实验，他事先在白纸上画好了一条条等距离的平行线，然后将纸平铺在桌上，又拿出一些质量均匀、长度为平行线间距离一半的小针，请客人把针一根根扔到纸上，蒲丰则在一旁计数，结果，共投了 21222 次. 其中与任意平行线相交的有 704 次. 蒲丰做了一个简单的除法 2212÷704≈3.142. 最

后，他宣布，这就是圆周率 π 的近似值，还表示，投针的次数越多结果就越精确.

上述实验可归结为以下的数学问题：平面上画有距离为 a 的一些平行线，向平面上任意投一根长为 l（$l<a$）的针，假设针落在任意位置是等可能的，试求针与平行线相交的概率 P.

解：如图 7-8 所示，以 M 表示针落下后的中点，以 x 表示 M 与最近一条平行线的距离，以 φ 表示针与此线的交角.

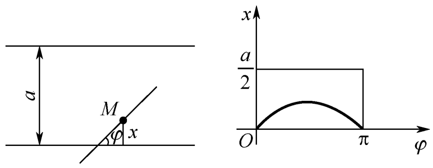


图 7-8

针落地的所有可能结果满足：

$$\begin{cases}0\le x\le \dfrac{a}{2}\\ 0\le \varphi\le \pi\end{cases}$$

它是平面上的一个矩形区域 Ω，也就是样本空间 Ω，其面积为

$$S(\Omega)=\frac{a\pi}{2}$$

而针与平行线相交的充要条件是：

$$\begin{cases}0\le x\le \dfrac{l\sin\varphi}{2}\\ 0\le \varphi\le \pi\end{cases}$$

它是样本空间 Ω 的一个子集 A，其面积为

$$S(A)=\int_0^{\pi}\frac{l\sin\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi=\frac{l}{2}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=l$$

因此，针与平行线相交的概率为

$$P=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{l}{\dfrac{a\pi}{2}}=\frac{2l}{a\pi}$$

当 $a=2l$ 时，$\pi=\dfrac{1}{P}$.

由于这一结果与 π 有关，所以蒲丰用投针实验来求 π 的近似值，这说明我们可以用随机数学的方法来解决确定性数学问题，这一思想方法被称为蒙特卡罗方法．他最初产生于 20 世纪 40 年代，现已在许多学科中普遍使用，而且成效极大.

解决蒲丰问题的关键，在于将原问题转化为几何概率问题，这种处理方法在许多的无限样本空间中求某一事件的概率问题中经常用到.

例题 4　设公共汽车每 5min 一班，求乘客等车不超过 1min 的概率.

解　设乘客的到站时刻为 t，他到站后来的第一辆车到站时刻为 t_0，由于乘客在 t_0-5 与 t_0 之间的任一时刻到站是等可能的，问题归结为向直线区域

$$\Omega=\left\{t \mid t_0-5<t \leq t_0\right\}$$

随机投一点，而

$$A=\{\text{等车不超过}1\min\}=\left\{t \mid t_0-1 \leq t \leq t_0\right\}$$

故

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{t_0-(t_0-1)}{t_0-(t_0-5)}=\frac{1}{5}$$

四、概率的性质

无论哪一种概率都有以下三种基本性质：

（1）对任意事件 A，有 $0 \leq P(A) \leq 1$；

（2）对必然事件 Ω， $P(\Omega)=1$；

（3）不可能事件 $\varnothing$， $P(\varnothing)=0$.

由这三种基本性质，可推出概率的下述重要性质.

性质 1 （**概率的加法原理**） 若 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 是两两互斥的事件，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

即互斥事件之和的概率等于各事件的概率之和.

例题 5 某射手在一次射击中命中 9 环的概率是 0.28，命中 8 环的概率是 0.19，不够 8 环的概率是 0.29，计算这个射手在一次射击中命中 9 环或 10 环的概率.

解 记这个射手在一次射击中命中 10 环或 9 环为事件 A，命中 10 环、9 环、8 环、不够 8 环分别记为 A_1，A_2，A_3，A_4.

$\because A_3$，A_3，A_4 彼此互斥

$\therefore P(A_2 \cup A_3 \cup A_4)=P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)$

$=0.28+0.19+0.29=0.76$

又 $\because A_1$ 与 $A_2 \cup A_3 \cup A_4$ 为对立事件，

$\therefore P(A_1)=1-P(A_2+A_3+A_4)$

$=1-0.76=0.24$

A_1 与 A_2 互斥，且 $A=A_1+A_2$.

$\therefore P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)$

$=0.24+0.28=0.52$

性质 2 设 A 为任一随机事件，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 2 告诉我们：如果正面计算事件 A 的概率有困难时，可以先求其逆事件 $\overline{A}$ 的概率，然后再利用此性质得其所求.

性质 3 设 A 和 B 是两事件，若 $A \subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

例题 6 对任意两个事件 A 与 B，有 $P(A-B)=$（　　）.

A. $P(A)-P(B)$　　B. $P(A)-P(B)+P(AB)$

C. $P(A)-P(AB)$　　D. $P(A)+P(AB)$

解 因为事件 A 与 B 的关系不知道，所以只能是把事件 A 中含有 B 的那一部分去掉，即应选（C）.

性质 4　对任意两个事件 A,B，有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

性质 4 可以用几何图形解释，如图 7-9 所示，整个矩形面积为 1，$P(A+B)$ 可以用阴影部分的面积表示，$P(A)+P(B)$ 是图中 A 的面积与 B 的面积之和，它减去重复计算了一次的 AB 的面积，剩下的就是图中阴影部分的面积.

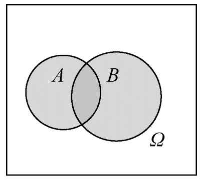


图 7-9

例题 7　在标有 1～1000 号的奖券中，规定偶数或者 3 的倍数号中奖，甲从中随机抽取一张，求甲中奖的概率.

解 设 A 表示甲中将，A_1 表示甲抽得偶数号，A_2 表示甲抽得 3 的倍数. 则 $A=A_1\cup A_2$，A_1A_2 表示抽得 6 的倍数号.则

$$P(A_1)=\frac{500}{1000},\quad P(A_2)=\frac{333}{1000},\quad P(A_1A_2)=\frac{166}{1000}.$$

所以

$$P(A\ )=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=\frac{500}{1000}+\frac{333}{1000}-\frac{166}{1000}=0.667$$

性质 4 也可以推广到多个事件相加的情形，下面给出三个随机事件的加法公式：

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

习题 7-3

1．某批乒乓球产品质量检查结果见表 7-3.

表 7-3

抽取球数 n	50	100	200	500	1000	2000
优等品数 m	45	92	194	470	954	1902

（1）计算表中优等品的各个频率；

（2）该批乒乓球优等品的概率是多少？

2．某人进行打靶练习，共射击 10 次，其中有 2 次中 10 环，有 3 次环中 9 环，有 4 次中 8 环，有 1 次未中靶．试计算此人中靶的概率，假设此人射击 1 次，试问中靶的概率约为多大？中 10 环的概率约为多大？

3．一个盒子中有大小相同的红颜色的球 4 个，白颜色的球 3 个.

（1）从中摸出 2 个球，求两球恰好颜色不同的概率；

（2）从中摸出 2 个球，求两球恰好颜色相同的概率.

4．一个均匀的正方形玩具的各个面上分别标以数 1，2，3，4，5，6 六个数，将这个玩具先后抛掷 2 次.

计算：（1）一共有多少种不同的结果？

（2）其中向上的数之和是 5 的结果有多少种？

（3）向上的数之和是 5 的概率是多少？

5．从 0，1，2，3，4，5，6 七个数中，任取 4 个数组成没有重复数字的四位数，求：

（1）这个四位数是偶数的概率；

（2）这个四位数能被 5 整除的概率.

6．某集体有 6 人是 2015 年 9 月出生的，求其中至少有 2 人是同一天出生的概率.

7．袋中有 7 个红球，3 个白球，从中任取 3 个球，求事件 A 取到 2 个红球 1 个白球的概率.

8．假设向三个相邻的军火库投掷一个炸弹，炸中第一个军火库的概率为 0.025，其余两个各为 0.1，只要炸中一个，另两个也要发生爆炸，求军火库发生爆炸的概率.

9．有产品 50 个，其中 45 个正品，5 个次品，从中任取 3 个，求有次品的概率.

10．某设备由甲、乙两个部件组成，当超载负荷时，各自出故障的概率分别为 0.90 和 0.85，同时出故障的概率是 0.80，求超载负荷时至少有一个出故障的概率.

第四节　概率的常用公式

学习内容：概率的加法公式、条件概率、乘法公式.

目的要求：理解概率的加法公式、条件概率、乘法公式，会用概率的加法公式、乘法公式、条件概率进行计算.

重点难点：加法公式、条件概率、乘法公式的应用.

一、概率的加法公式

某一随机试验产生了一个样本空间 Ω，在古典概型下，样本空间的元素（样本点）为有限个，设为 n 个．设事件 A 的样本点个数为 m_1 个，事件 B 的样本点为 m_2 个，积事件 AB 的样本点个数为 r 个，和事件 $A\cup B$ 所包含的样本点的个数为 m_1+m_2-r 个，则

$$P(A\cup B)=\frac{m_1+m_2-r}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{r}{n}$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

特别地，

（1）当事件 A 与事件 B 互斥，即 $AB=\varnothing$ 时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；

（2）$P(\overline{A})=1-P(A)$；

（3）对于 n 个两两互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，则有同样如下公式：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

（4）对于三个事件 A,B,C 有如下公式：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

我们可以得到以下定理和推理.

【定理 1】若事件 A 和 B 互不相容，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

如图 7-10 所示，$A+B$：m_1+m_2 个等概基本事件

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$$
$$=P(A)+P(B).$$

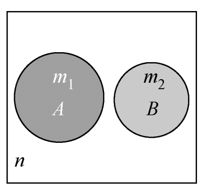


图 7-10

【推理 1】　若有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

【推理 2】　若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，且 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = U$，则

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$$

【推理 3】　对立事件的概率满足：

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

例题 1　袋中有 5 个红球，4 个白球，从中任取 3 个，求其中至少有 1 个红球的概率.

解　设 A 表示取出的 3 个球中至少有 1 个红球，A_i 表示取出的 3 个球中有 i 个红球，$i = 1,2,3$，那么 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$，且 A_1, A_2, A_3 两两互斥，所以，根据概率的性质得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= \frac{C_5^1 \cdot C_4^2}{C_9^3} + \frac{C_5^2 \cdot C_4^1}{C_9^3} + \frac{C_5^3 \cdot C_4^0}{C_9^3} \\ &= \frac{20}{21} \end{aligned}$$

【定理 2】设 A 和 B 为任意两个事件，则 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

如图 7-11 所示，AB 基本事件个数为 k，$A+B$ 基本事件个数为 $m_1 + m_2 - k$．因此

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2 - k}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{k}{n} = P(A) + P(B) - P(AB)$$

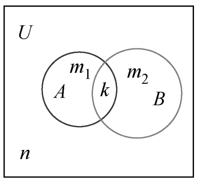


图 7-11

说明：加法公式可推广到有限个事件的情形.

例如，若 A，B，C 为任意三个事件，则

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

例题 2　设开关 A，B，C 开或闭是等可能的，试求灯亮的概率.

解　令 M={灯亮}，A，B，C 分别表示开关闭合，则

$$M = A + B + C$$

故

$$\begin{aligned} P(M) &= P(A+B+C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \end{aligned}$$

又因

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(ABC) = \frac{1}{8}$$

所以

$$\begin{aligned}P(M)&=3\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\\&=\frac{7}{8}\end{aligned}$$

二、条件概率

在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率，称为已知 B 时 A 的条件概率或 A 关于 B 的**条件概率**，记作 $P(A|B)$.

并且条件概率的计算公式：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\ (P(B)\neq 0)$$

同理，在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\ (P(A)\neq 0)$$

例题 3 某厂生产的灯泡用满 8000h 未坏的概率是 $\frac{3}{4}$，用满 10000h 未坏的概率是 $\frac{1}{2}$. 现有一个此厂生产的灯泡，已经用过 8000h 未坏，问它能用到 10000h 的概率.

解 设 A 表示 $\{用满10000h未坏\}$，B 表示 $\{用满8000h未坏\}$，则

$$P(B)=\frac{3}{4},\quad P(A)=\frac{1}{2}$$

由于 $A\subset B$，$AB=A$，因而 $P(AB)=P(A)=\frac{1}{2}$，故

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$$

三、乘法公式

将条件概率公式以另一种形式写出，就是乘法公式的一般形式.

乘法公式 设 $P(A)\neq 0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

将 A,B 的位置对换，则可得到乘法公式的另一种形式

$$P(AB)=P(B)P(A|B)\quad (P(B)\neq 0)$$

利用乘法公式，可以计算两事件 A,B 同时发生的概率 $P(AB)$.

例题 4 已知盒子中装有 10 只电子元件，其中 6 只正品，从其中不放回地任取两次，每次取一只. 问两次都取到正品的概率是多少？

解 设 A 表示 $\{第一次取到的是正品\}$，B 表示 $\{第二次取到的是正品\}$，则

$$P(A)=\frac{6}{10},\quad P(B|A)=\frac{5}{9}$$

两次都取到正品的概率是

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

乘法公式也可以推广到有限多个事件的情形，例如对于三个随机事件 A_1, A_2, A_3 $(P(A_1A_2) \neq 0)$ 有

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$$

习题 7-4

1．袋中装有 2 个红球，3 个白球，4 个黑球. 从中每次任取一个，并放回，连取两次，求：

（1）取得的两球中无红球的概率；

（2）取得的两球中无白球的概率；

（3）取得的两球中无红球或无白球的概率.

2．在一个盒子内放有 20 个大小相同的小球，其中有 15 个红球，5 个白球，从中抽取 3 个，求至少有 1 个白球的概率.

3．一个线路上装有甲、乙两根保险丝，当电流超过一定量时，甲、乙保险丝被烧断的概率分为 0.85 和 0.74，两根同时烧断的概率为 0.63，求至少有一根被烧断的概率.

4．在 1，2，…，100 中任取一数，求它能被 2 整除，或能被 5 整除的概率.

5．填空题.

（1）若事件 A 与 B 满足 $P(A) = 0.4$， $P(B) = 0.3$， $P(B|A) = 0.5$， $P(A+B) =$ ______.

（2）设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取 2 件，已知所取 2 件产品中有 1 件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为______.

（3）五个乒乓球（3 新 2 旧），每次取一个，无放回地取两次，第二次取得新球的概率为______.

6. 设 A 和 B 为两个随机事件，已知 $P(A|B) = 0.3$，$P(B|A) = 0.4$ $P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.7$ 求 $P(A+B)$ 的值.

第五节　事件的独立性与伯努利概型

学习内容：事件的独立性定义，伯努利概型.

目的要求：熟练掌握事件的独立性定义，区分开互斥事件与独立事件，理解并掌握贝努利概型.

重点难点：事件的独立性定义，伯努利概型以及二项概率公式应用.

一、事件的独立性概念

设 A, B 是试验 E 的两个事件，若 $P(A) > 0$，一般地，A 的发生对 B 发生的概率是有影响的，这时 $P(B|A) \neq P(B)$．但在实际情况中，也还会有另一种情况，即事件 B 的发生与否不受事件 A 是否发生的影响，即

$$P(B|A) = P(B).$$

对此有下面的定义：

如果两个事件 A,B 中任一事件的发生不影响另一事件发生的概率，即

$$P(A\mid B)=P(A) \text{ 或 } P(B\mid A)=P(B),$$

则称 A,B 为**相互独立的事件**，否则，称为是**不独立**的.

容易证明：

（1）若事件 A 与事件 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立；

（2）若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 A,B 相互独立与 A,B 不相容不能同时成立.

【定理 1】 两个事件 A,B 相互独立的充分必要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来判断，而是根据实际意义来加以判断的.

例题 1 甲、乙两人独立地破译一个密码，甲能单独破译的概率是 0.6，乙能单独破译的概率是 0.8，求此密码被破译的概率.

解：设事件 A 表示{甲破译密码}，事件 B 表示{乙破译密码}，事件 C 表示{破译密码}，则有

$$P(A)=0.6,\quad P(B)=0.8$$

又因为 $C=A+B$，且 A 与 B 相互独立，故

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=0.6+0.8-0.6\times0.8=0.92\end{aligned}$$

例题 2 甲、乙、丙三部机床独立工作，由一个工人照管，某短时间内它们不需要工人照管的概率分别为 0.9，0.8.0，85．求在这段时间内有机床需要工人照管的概率.

解 用事件 A，B，C 分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙不需要工人照管．依题意，A，B，C 相互独立，并且

$$P(A)=0.9, P(B)=0.8, P(C)=0.85$$

$$\begin{aligned}P(\overline{ABC})&=1-P(ABC)=1-P(A)P(B)P(C)\\&=1-0.612=0.388\end{aligned}$$

二、n 重独立试验概型

若试验 E 单次试验的结果只有两个 A 和 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$ 保持不变，将试验 E 在相同条件下独立地重复做 n 次，称这 n 次试验为 **n 重独立试验序列**，这个试验模型称为 **n 重独立试验序列概型**，也称为 **n 重伯努利概型**，简称**伯努利概型**.

我们的问题是，n 重伯努利概型中事件 A 发生 k 次的概率是多少？先看下面例子.

例题 3 设有一批产品，次品率为 p，现进行有放回或地抽取，即任取一个产品，检查一下它是正品还是次品后，放回去，再进行第二次抽取，问任取 n 次后发现两个次品的概率是多少？

解 先讨论 $n=4$ 的情形.

设 A_i 表示 $\{$第 i 次抽得的是次品$\}(i=1,2,3,4)$，则 $\overline{A_i}$ 表示 $\{$第 i 次抽得的是正品$\}$．在 4 次试验中，抽得两次次品的方式有 $C_4^2=6$ 种，即

$$A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4,\ A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4,\ A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$$
$$\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4,\ \overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4,\ \overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4 .$$

以上各种方式中，任何两种方式都是互斥的，因此在 4 次试验中，恰抽得两个次品的概率是

$$P_4(2)=P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)+P(A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4)+\cdots+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4).$$

由于抽得次品的概率都是一样的，即$P(A_i)=p$，且各次试验是相互独立的，于是有

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)=p^2(1-p)^{4-2}.$$

同理有　$$P(A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4)=\cdots=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4)=p^2(1-p)^{4-2}.$$

于是　$$P_4(2)=p^2(1-p)^{4-2}+p^2(1-p)^{4-2}+\cdots+p^2(1-p)^{4-2}=C_4^2p^2(1-p)^{4-2}.$$

推广到一般情形，n次试验中事件A发生$k\left(0\le k\le n\right)$次的概率为

$$p_k=P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n.$$

可以证明

$$\sum_{k=0}^{n}p_k=\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=(p+1-p)^n=1$$

【定理 2】　若单次试验中事件A发生的概率$p\left(0<p<1\right)$，则在n次重复试验中

$$P(A\text{发生}k\text{次})=C_n^kp^kq^{n-k}\quad(q=1-p,k=0,1,2,\cdots,n)$$

注意到，$C_n^kp^kq^{n-k}$刚好是二项式的展开式中的第$k+1$项，故定理 2 也称为二项概率计算公式.

例题 4　某篮球运动员投篮命中的概率是 0.9，如果连续投篮 4 次，试求命中 3 次的概率.

解　设事件A={投篮命中}，则$P(A)$=0.9，因此

$$p(\text{命中3次})=C_4^3(0.9)^3(1-0.9)^1=0.2916$$

二项概率公式应用的前提是$\{n\text{重独立重复试验}\}$. 实际中，真正完全重复的现象并不常见，常见的只不过是近似的重复. 尽管如此，还是可用上述二项概率公式做近似处理.

例题 5　某种产品的次品为 5%，该产品的总数很大，且抽出样品的数量相对较小，因而可以当做是有放回抽样处理，这样做会有一些误差，但误差不会太大. 抽出 20 个样品检验，可看做是做了 20 次独立试验，每一次是否为次品可看成是一次试验的结果，因此 20 个该产品中恰有 2 个次品的概率是

$$P(\text{恰有2个次品})=C_{20}^2(0.05)^2(0.95)^{18}\approx0.189.$$

习题 7-5

1．选择题

（1）对于任意两事件A和B，有（　　）.

A．若$AB\ne\varnothing$，则A,B一定独立　　B．若$AB\ne\varnothing$，则A,B有可能独立

C．若$AB=\varnothing$，则A,B一定独立　　D．若$AB=\varnothing$，则A,B一定不独立

（2）设$P\left(A\right)=0.8,P\left(B\right)=0.7,P\left(A\mid B\right)=0.8$，则下列结论正确的是（　　）.

A．事件 A 与 B 互不相容　　B．$A \subset B$

C．事件 A 与 B 互相独立　　D．$P(A+B)=P(A)+P(B)$

（3）每次试验的成功率为 $p\left(0<p<1\right)$，独立地重复进行试验直到第 n 次才取得 $r\left(1 \le r \le n\right)$ 次成功的概率为（　　）.

A．$C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$　　B．$C_{n-1}^{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$

C．$p^r (1-p)^{n-r}$　　D．$C_{n-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r}$

2．填空题

(1) 电灯泡使用寿命在 1000h 以上的概率为 0.2，则 3 个灯泡在使用 1000h 以后，最多只有 1 个坏了的概率为__________.

(2) 某射手在 3 次射击中至少命中 1 次的概率为 0.875，则该射手在 1 次射击中命中的概率为__________.

3．设甲、乙两射手独立地射击同一目标，他们击中目标的概率分别为 0.9 和 0.8，求在一次射击中目标被击中的概率.

4．一条自动生产线上产品的一级品率为 0.6，现检查了 10 件，求至少有两件一级品的概率.

5．某射手每次击中目标的概率是 0.6，如果射击 5 次，试求至少击中两次的概率.

第六节　随机变量及其分布

导语："小九九"是乘法运算的本源，千变万化的乘法运算都是从"小九九"演化而来. 概率分布就像概率统计的"小九九"，它可以帮助我们解决很多常见的概率统计问题，即简洁又高效.

学习内容：随机变量，离散型随机变量及其分布，随机变量的分布函数，连续型随机变量及其分布，正态分布，标准正态分布.

目的要求：掌握随机变量的定义和随机变量的分类；熟练掌握离散型随机变量的定义，掌握两点分布和二项分布并能够计算相应题目，理解并掌握随机变量的分布函数；熟练掌握连续型随机变量及其概率密度函数和分布函数的定义，会求连续型随机变量的分布函数及其在区间上的概率；熟练掌握正态分布和标准正态分布的定义以及密度函数、分布函数、正态分布和标准正态分布的性质，会利用查表法求各种区间上的概率.

重点难点：两点分布、二项分布和随机变量的分布函数，概率密度函数及在区间上的概率，求分布函数、正态分布和标准正态分布的密度函数与分布函数.

不管你喜欢不喜欢数学课，你一定记得"小九九"，你一定知道"一一得一，一二得二"和"九九八十一"."小九九"是学习乘法的第一课，也是最重要的乘法口诀. 常言道："万变不离其宗"，"小九九"便是乘法之"宗"，千变万化的乘法运算都是从"小九九"演化而来.

统计学也有自己的"小九九"，但它不是一个口诀，而是从很多典型概率问题中总结出的经验，我们称为概率分布，简称分布.

一、随机变量的概念

为了全面地研究随机试验的结果，揭示客观存在着的统计规律，我们将随机试验的结果与一个实数对应起来，将随机试验的结果数量化．事实上，有许多随机试验的结果本身就是一个实数．例如，在掷骰子试验中，用数字 1，2，3，4，5，6 分别表示“出现的点数是 1，2，3，4，5，6”．当然也有一些随机试验的结果，它本身不是一个实数，这时我们可以设法将其量化．

例题 1　考察“抛硬币”这一试验，它有两个可能结果：“正面向上”或“反面向上”．为了便于研究，我们将每一个结果用一个实数来代替．例如，用数“1”代表“正面向上”，用“0”代表“反面向上”．这样，当我们讨论试验结果时，就可以简单地说成结果是数 1 或者数 0．

建立这种数量化关系，实际上就相当于引入一个变量 X，对于试验的两个结果，将 X 的值分别定为 1 或 0．这样的变量 X 随着试验的不同结果而取不同的值．如果与试验的样本空间 $\Omega=\{\omega\}=\{正面向上，反面向上\}$ 联系起来，那么，对应于样本空间的不同元素，变量 X 取不同的值，因此 X 是定义在样本空间上的函数，即

$$X=\begin{cases}0, & \omega=反面向上\\ 1, & \omega=正面向上\end{cases}$$

由于试验结果的出现是随机的，因而 $X(\omega)$ 的取值也是随机的，我们称 $X(\omega)$ 为随机变量，其一般定义如下：

设 E 是随机试验，它的样本空间是 $\Omega=\{\omega\}$（这里我们用 ω 代表样本空间中的所有元素）．如果对于每一个 $\omega\in\Omega$，有一个实数 $X(\omega)$ 与之对应，这样就得到一个定义在 Ω 上的单值实函数 $X=X(\omega)$，称为**随机变量**，记作 X 或 ξ．

引入随机变量 X 后，就可以用随机变量 X 来描述事件．如在例题 1 中，X 取值为 1 写成 $\{X=1\}$，它表示事件{正面向上}；X 取值为 0 写成 $\{X=0\}$，它表示事件{反面向上}．由于随机变量 X 的取值随试验的结果而定，而试验的各个结果的出现有一定的概率，因而 X 取各个值也有一定的概率．如在例题 1 中，有

$$P\{X=1\}=P\{正面向上\}=\frac{1}{2}$$

如上所述，随机变量是定义在样本空间 Ω 上的单值实函数 $X=X(\omega)$，它与普通函数的定义有类似之处，但也有本质区别．主要是：第一，随机变量随着试验结果的不同而取不同的值，因而在试验之前，只知道它可能取值的范围，而不能预知它取什么值；第二，随机变量取各个值有一定的概率，而不像普通函数那样给定一个 x 值，就有一个确定的 y 值与之对应；第三，普通函数是定义在实数轴上的，而随机变量是定义在样本空间上的（样本空间的元素不一定是实数）．

例题 2　60 只乒乓球中有 6 只次品，从中任取 5 只，将取出的次品数由随机变量 ξ 表示．

解　$\{\xi=k\}=\{取出k件次品\}\quad(k=0,1,2,3,4,5)$

例题 3　对灯泡的使用寿命进行检测，将灯泡的使用寿命用随机变量 ξ 表示．

解　$\{\xi\}=\{\xi可能取[0,+\infty)内的任一值\}$

对于随机变量的分类，首先按描述实际问题所需变量个数，有一维与多维的区别；其次，随机变量的维数被认定之后，可按其取值方式继续进行分类．

随机变量按其取值情况可分为两类，在随机试验中，如果随机变量的所有可能取值是有限个或是可列无限多个，这种随机变量叫做**离散型随机变量**；否则叫做**连续型随机变量**.

对于随机变量，本书只讨论离散型和连续型两类.

对一个随机变量ξ不仅要了解它取哪些值，还要了解它取这些值的规律，即取各个值的概率.

二、离散型随机变量的分布列

1. 离散型随机变量的概念

如果随机变量X只取有限个或可列无限多个值，而且以确定的概率取这些不同的值，则称X为**离散型随机变量**.

例如，在掷硬币的随机试验中的随机变量只可能取 0 和 1 两个值，它是一个离散型随机变量．又如电话交换台一分钟内收到的呼唤次数可能取 0，1，…，因此也是一个离散型随机变量．而检验灯泡寿命，它所可能取的值充满一个区间，是无法按一定次序一一列举出来的，所以它是一个非离散型随机变量.

容易知道，要掌握一个离散型随机变量X的统计规律，必须且只须知道X的所有可能取的值以及取每一个可能值的概率就可以了.

设离散型随机变量X所有可能取的值为$x_k(k=1,2,\cdots)$，X取这些可能值的概率，即事件$\{X=x_k\}$的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$$

且p_k满足如下两个条件：

（1）$p_k\geq 0,k=1,2,\cdots$；

（2）$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$.

我们称式$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$为离散型随机变量的**概率分布**或**分布律**．分布律也可以用表格形式来表示（见表 7-4）.

例题 4　盒子中有编号为 1，2，3，4，5 的五个小球，从中随机抽取三个，每个球被抽到的机会相等．以X表示被抽到的三个球中的最大号码，试求X的分布率.

解　显然，X的所有可能取的值为 3，4，5．它是一个离散型随机变量，属等可能概型，其中样本空间Ω中的基本事件总数$n=C_5^3=10$.而有利于事件$\{X=3\}$的基本事件数$k_1=C_3^3=1$（即只能从 1，2，3 这三个数中取三个，才能使号码 3 为最大）.

有利于事件$\{X=4\}$的基本事件数为$k_2=C_3^2C_1^1=3$（即只能从 1，2，3 这三个数中取两个，再将 4 取出来，就能保证数码 4 为最大）.

有利于事件$\{X=5\}$的基本事件数为$k_3=C_4^2C_1^1=6$（即只能从 1，2，3，4 这四个数中取两个，再将 5 取出来，就能保证数码 5 为最大）.

于是所求的分布律见表 7-5.

表 7-4

X	x_1	x_2	$\cdots$	$x_n\cdots$
$P(k)$	p_1	p_2	$\cdots$	$p_n\cdots$

表 7-5

X	3	4	5
$P(k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$P\{X=3\}=\frac{1}{10},\quad P\{X=4\}=\frac{3}{10},\quad P\{X=5\}=\frac{6}{10}.$$

2．几个重要的离散型随机变量

（1）两点分布

设随机变量 X 只可能取 0 与 1 两个值，它的分布律是

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}\ ,k=0,1\,(0<p<1)$$

则称 X 服从**两点分布**(也称 0-1 分布).其分布律也可列表表示，见表 7-6.

表 7-6

X	0	1
p^k	1-p	p

对于一个随机试验 E，如果它的样本空间只包含两个元素，即 $\Omega=\{e_1,e_2\}$，我们总能在 Ω 上定义一个服从两点分布的随机变量

$$X=X(\omega)=\begin{cases}0 & 当\omega=e_1\\ 1 & 当\omega=e_2\end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果．例如，对新生婴儿的性别进行登记、检查产品的质量是否合格、市场情况的好与坏以及前面多次讨论过的“抛硬币”试验等都可以用两点分布的随机变量来描述.

（2）二项分布

在前文中我们讨论过一个重要的独立试验概型——伯努利概型，我们知道，对于伯努利试验，事件 A 在 n 次试验中出现 k 次的概率为

$$P\{A发生k次\}=C_n^k p^k q^{n-k}\quad (q=1-p,k=0,1,2,\cdots,n).$$

且满足

（1） $P_n(k)\geq 0,k=0,1,\cdots,n$ ；

（2） $\sum\limits_{k=0}^{n}P_n(k)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1$.

注意到， $C_n^k p^k q^{n-k}$ 刚好是二项式 $(p+q)^n$ 的展开式中出现 p^k 的一项，故我们称随机变量服从二项分布．一般定义如下：

设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

其中 $0<p<1$， $q=1-p$，则称 X 服从参数 n,p 的**二项分布**，记为 $X\sim B(n,p)$.

特别，当 $n=1$，二项分布化为

$$P\{X=k\}=p^k q^{k-1}.$$

这就是两点分布.

事实上，二项分布可以作为描绘射手射击 n 次，其中有 k 次击中目标（k=0，1，2，…，n）的概率分布情况的一个数学模型，也可以作为随机地抛掷硬币 n 次，落地时出现 k 次“正面”的概率分布情况的数学模型，当然还可以作为从一批足够多的产品中任意抽取 n 件，其中有 k 件次品的概率分布的模型．总之，二项分布是由伯努利试验产生的.

例题 5　进口某种货物 n 件，每件价值 a 元．按合同规定，如果在 n 件货物中发现一件

不合格品，则出口方应赔偿 $2a$ 元．如果每件货物可能为不合格品的概率是 p，问 n 件货物中有 k 件不合格品的概率是多少？

解　用 X 记 n 件货物中的不合格品数，则 $X \sim B(n,p)$，所以 n 件货物中有 k 件不合格品的概率为

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},(0 \le k \le n).$$

三、随机变量的分布函数

分布函数是描述随机变量的另一个重要工具，不论是对离散型随机变量还是对非离散型随机变量都适用．特别是对于非离散型随机变量，由于可能取的值不能一个一个地列举出来，因而就不能像离散型随机变量那样可以用分布律来描述．其次，我们所遇到的非离散型随机变量通常任取一指定的实数值的概率都等于 0．另外，在实际应用中，对于这样的随机变量，人们往往并不关心它取某一个指定的实数值的概率，而是要研究这种随机变量所取的值落在某个区间内的概率．例如，在灯泡的寿命试验中，我们对寿命 t 取某一个具体值（例如 1250h）的概率并不感兴趣，而研究 t 落在某个区间（例如 $500 < t \le 1500$ h）的概率更具有实际意义.

一般，对于随机变量 X，为了研究 $P\{x_1 < X \le x_2\}$（其中 x_1，x_2 为给定的实数），由于

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\}$$

所以我们只要知道 $P\{X \le x_2\}$ 和 $P\{X \le x_1\}$，就可以通过

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\}$$

式求出 $P\{x_1 < X \le x_2\}$.

下面引入随机变量的分布函数的概念.

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，则函数

$$F(x)=P\{X \le x\}$$

称为 X 的**分布函数**.

对于任意实数 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，有

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\} = F(x_2)-F(x_1).$$

因此，若已知 X 的分布函数，就可以用上式计算出 X 落在任一区间 $(x_1,x_2]$ 上的概率，从这个意义上说，分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性.

如果将 X 看成是数轴上的随机点的坐标, 那么分布函数 $F(x)$ 在 x 处的函数值就表示 X 在区间 $(-\infty,x]$ 上的概率（见图 7-12）.

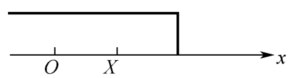


图 7-12

设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数, 则它具有下述基本性质：

（1）$F(x)$ 是一个不减函数；

（2）$0 \le F(x) \le 1$，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

（3）$F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的.

四、连续型随机变量及其密度函数

对于连续性随机变量 ξ，由于其可能取的值不能一一列出，因此不能像离散型随机变

量那样来描述它，况且非离散型随机变量ξ，可以取某一区间内的所有值，这时求ξ取某个特定值的概率意义不大，因此我们转而研究ξ落在某个区间内的概率，即$P\{a \le \xi \le b\}$.

1．概率密度定义

一般地，对于随机变量ξ，若存在定义在$(-\infty,+\infty)$内的非负函数$p(x)$，使ξ在任意区间$(-\infty,x]$上的取值的概率为$P\{\xi \le x\} = \int_{-\infty}^{x} p(t)\mathrm{d}t$，则把$\xi$叫做连续性随机变量，把$p(x)$叫做$\xi$的**概率密度函数**或者**概率密度**.

根据定义，容易证明：

（1）连续性随机变量ξ取区间内任一值的概率为零，即：$P\{\xi = c\} = 0$ $p(x) \ge 0$；

（2）连续性随机变量ξ在任一区间上取值的概率与是否包含区间端点无关，即

$$P\{a<\xi<b\} = P\{a \le \xi < b\} = P\{a < \xi \le b\} = P\{a \le \xi \le b\} = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\ ;$$

（3）$P\{a \le \xi \le b\} = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} p(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{b} p(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

值得注意的是，密度函数$p(x)$在某一点处的函数值，并非表示随机变量ξ在此点处的概率，而表示ξ在此点处概率分布的密集程度．分布函数$F(x)$在某一点处的函数值，表示随机变量ξ落在区间$(-\infty,x]$上的概率.

2．概率密度函数$p(x)$的性质

概率密度函数具有如下性质：

（1）$p(x) \ge 0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1$.

反之，如果一个函数$p(x)$具有上述两个性质，则可以把它看成是某个连续性随机变量的密度函数.

由以上所述可知，若已知连续性随机变量ξ的密度函数，则ξ在任一区间内取值的概率都可以通过定积分算出，因此，密度函数全面描述了连续性随机变量的统计规律．以后，我们说某个连续性随机变量ξ的概率分布，指的就是求它的密度函数.

例题 6　设连续型随机变量ξ的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} c+x & -1<x \le 0 \\ c-x & 0<x \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求：（1）常数c；

（2）分布函数；

（3）$P\left\{-\dfrac{1}{2} < \xi \le \dfrac{1}{2}\right\}$.

解　（1）$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(c+x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = c$.

（2）当$x<-1$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} 0\mathrm{d}t = 0$；

当$-1 \le x < 0$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} 0\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$；

当$0 \le x < 1$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} 0\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t + \int_0^x (1-t)\mathrm{d}t = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$；

当 $x \geq 1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} 0\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}(1-t)\mathrm{d}t+\int_{1}^{x} 0\mathrm{d}t=1$.

所以，随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2} & -1 \leq x<0 \\ x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2} & 0 \leq x<1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

（3）$P\left\{-\dfrac{1}{2}<\xi \leq \dfrac{1}{2}\right\}=F(\dfrac{1}{2})-F(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}$.

3. 均匀分布

定义　设连续型随机变量 ξ 具有概率密度

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

则称 ξ 在区间 (a,b) 上服从**均匀分布**.

服从均匀分布的随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x<b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

例题 7　在数值计算中, 由于“ 四舍五入 ”引起的误差 ξ 是服从均匀分布的随机变量. 如果只要求保留小数点后两位数, 则第三位是服从在区间 $(-0.005,0.005)$ 上的均匀分布的随机变量 ξ.

（1）求 ξ 的概率密度和分布函数；

（2）求误差在（0.003，0.006）上的概率.

解　（1）由定义知，ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{0.01} & -0.005<x<0.005 \\ 0 & 其他 \end{cases}.$$

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<-0.005 \\ \dfrac{x+0.005}{0.01} & -0.005 \leq x<0.005 \\ 1 & x \geq 0.005 \end{cases}.$$

（2）$P\{0.003 \leq \xi \leq 0.006\}=F(0.006)-F(0.003)=1-0.8=0.2$.

4. 正态分布与标准正态分布

在实际中，有许多的随机变量是服从正态分布的，例如，人的身高、植物的生长、测量零件长度的误差等. 这一节我们主要讲述正态分布.

（1）正态分布的定义

设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty \tag{1}$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 为常数，则称 X 服从参数为 μ,σ 的**正态分布**，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

$f(x)$ 的图形如图 7-13 所示，它具有以下性质：

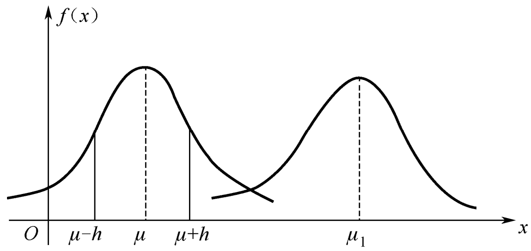


图 7-13

（1）曲线 $y=f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称，这表明对于任意 $h>0$ 有

$$P\{\mu-h<X\le\mu\}=P\{\mu<X\le\mu+h\}$$

（2）当 $x=\mu$ 时取到最大值

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{2}$$

x 离 μ 越远，$f(x)$ 的值越小，这表明对于同样长度的区间，当区间离 μ 越远时，X 落在这个区间上的概率越小.

（3）在 $x=\mu\pm\sigma$ 处曲线有拐点，曲线以 Ox 为渐近线.

另外，如果固定 σ，改变 μ 的值，则图形沿着 Ox 轴平移，而不改变其形状（见图 7-13）. 可见正态分布的概率密度曲线 $y=f(x)$ 的位置完全由参数 μ 所确定，μ 称为位置参数.

如果固定 μ，改变 σ 的值，则由最大值的公式可知，当 σ 越小时图形变得越尖，因而 X 落在 μ 附近的概率越大；而当 σ 越大时，图形变得越平缓，因而 X 落在 μ 附近的概率越小（见图 7-14）.

服从正态分布的随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t \tag{3}$$

它的图形如图 7-15 所示.

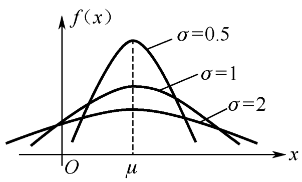


图 7-14

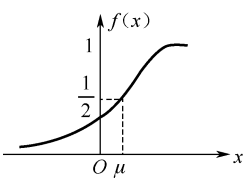


图 7-15

（2）标准正态分布

特别，在上述（1）和（3）式中，当 $\mu=0,\sigma=1$ 时称 X 服从标准正态分布，记为 $X\sim N(0,1)$．其概率密度函数和概率分布函数分别用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示，即有

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\,.$$

易知
$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)\,.$$

标准正态分布的概率密度 $\varphi(x)$ 除具有一般概率密度的性质之外，还有下列性质（见图 7-16）：

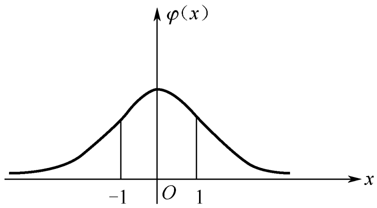


图 7-16

（1）$\varphi(x)$ 有各阶导数；

（2）$\varphi(-x)=\varphi(x)$，即 $\varphi(x)$ 的图形关于 y 轴对称；

（3）$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内严格单调上升，在 $(0,+\infty)$ 内严格单调下降，在 $x=0$ 达到最大值，即

$$\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0.3989\,.$$

（4）$\varphi(x)$ 在 $x=\pm1$ 处有两个拐点；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$，即曲线 $y=\varphi(x)$ 以 Ox 为水平渐近线.

人们已经编写了标准正态分布的概率密度表和分布函数表，可供查用（见附录 I）.

例题 8　查表求 $\Phi(1.65),\Phi(0.21),\Phi(-1.96)$.

解　求 $\Phi(1.65)$：在标准正态分布数值表中第 1 列找到“1.6”的行，再从表顶行找到“0.05”的列，它们交叉处的数“0.9505”就是所求 $\Phi(1.65)$，即 $\Phi(1.65)$=0.9505.

求 $\Phi(0.21)$：在标准正态分布数值表中第 1 列找到“0.2”的行，再从表顶行找到“0.01”的列，它们的交叉处的数“0.5832”就是所求的 $\Phi(0.21)$，即 $\Phi(0.21)$=0.5832.

求 $\Phi(-1.96)$：标准正态分布数值表中只给了 $x\geq0$ 时 $\Phi(x)$ 的值，当 $x<0$ 时，用 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

于是
$$\Phi(-1.96)=1-\Phi(1.96)=1-0.9750=0.0250\,.$$

例题 9　设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求 $P\{X<2.2\}$，$P\{0.5\leq X<0.55\}$，$P\{X\geq1.5\}$.

解　$P\{X<2.2\}=\Phi(2.2)=0.9861$；

$P\{0.5\leq X<0.55\}=\Phi(0.55)-\Phi(0.5)=0.7088-0.6915=0.0173$；

$P\{X \geq 1.5\} = 1 - P(X < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$.

若随机变量 X 服从正态分布，即 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，我们只要通过一个线性变换就能将它转化成标准正态分布.

定理　若随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

例题 10　设 $X \sim N(1,0.2^2)$，求 $P\{X < 1.2\}$ 及 $P\{0.7 \leq X < 1.1\}$.

解　设 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-1}{0.2}$，则 $Z \sim N(0,1)$，于是

$$P\{X < 1.2\} = P\left\{Z < \frac{1.2-1}{0.2}\right\} = P\{Z < 1\} = \Phi(1) = 0.8413.$$

$$P\{0.7 \leq X < 1.1\} = P\left\{\frac{0.7-1}{0.2} \leq Z < \frac{1.1-1}{0.2}\right\} = P\{-1.5 \leq Z < 0.5\} = \Phi(0.5) - \Phi(-1.5)$$
$$= \Phi(0.5) + \Phi(1.5) - 1 = 0.6915 + 0.9332 - 1 = 0.6247$$

【一不小心就会被骗——统计数字的学问】

1．平均深度为 50cm 的河流也会淹死人

假设一条河边竖着一块牌子，上面写着“到对岸为止的河流平均深度为 50cm”.

持有“50cm 不会淹死人，所以可以徒步过河”的这种想法可以说是一个很大的错误——即使大部分地方的水深度为 40～50cm，但是中间阶段也有可能水深度超过 1m．实际上，即使是脚能够触及的深度，陡然变深的时候，慌乱中也有可能会溺水身亡.

徒步过河是否危险并不决定于其平均深度，而是根据其最深处的深度来决定的.

除河流深度外，当考虑射线在多少时会构成危险、有害物质含量超过多少毫克时会有危险等情况时，并不是根据平均值而是根据其安全界线时的数值.

2．即使数字不发生变化，比例也会变化

不仅平均值，我们还需注意如果不对统计数字所蕴含的含义进行详细分析，而是一味接受的话，就有可能会遇到危险或被欺骗.

例如，交通事故的死亡人数，到某一年的每年死亡人数约为 1 万人，之后每年的死亡人数增加到 15 万人，从这个数字我们便可以判断“因为不遵守交规而导致死亡人数增加”吗？

对于此类情况，我们必须注意的是，在统计上“死于交通事故的人数”是如何定义的．2002 年，日本警察局发表的交通事故死亡人数定义为“事故发生后 24 小时内死亡的数量”(中国为 7 天)，如果超过 24 小时，那么就不计算在内．但是，如果“24 小时以内”这个定义在某一年变化为“48 小时”，死亡人数便会增加．这种情况中死于交通事故的人数没有变化，但从统计数据上看却起了变化.

习题 7-6

1．填空题

(1) 随机变量按其取值情况可分为两类，在随机试验中，如果随机变量的所有可能取值是有限个或是可列无限多个，这种随机变量叫做_______；否则叫做_________.

（2）一般地，把表示随机事件结果的变量叫做__________.

（3）设 100 件产品中有 10 件次品，每次随机抽取 1 件，检验后放回去，连续抽 3 次，则最多取到 1 件次品的概率为__________.

（4）某射手每次射击击中目标的概率为 p，连续向同一目标射击，直到某一次击中为止，则射击次数 X 的概律为__________.

2．用随机变量来描述下列试验结果.

（1）用随机变量来描述掷一枚硬币的试验结果.

（2）若某射手射击时中靶的环数为随机变量 X，说明“$X=0$”“$X=6$”“$P(X=2)$”“$P(X<4)$”的意义.

（3）20 只灯管中有 4 只次品，从中任取 3 件，将取出的次品数用随机变量 ξ 表示.

（4）某射手连续向一目标射击，直到命中为止，将射击次数用随机变量 ξ 表示.

（5）某运动员进行连续投篮练习，直到投进篮筐为止，将投篮次数用随机变量 ξ 表示.

3．袋中有 4 个白球和 6 个黑球，放回式地取 3 次，每次取 1 个，设 3 次中取到白球的次数为随机变量 ξ，求 ξ 的分布.

4．掷一枚均匀的骰子，试写出点数 X 的概率分布列，并求 $P(X>1)$，$P(2<X<5)$.

5．盒中装有某种产品 15 件，其中有 2 件次品，现在从中任取 3 件，试写出取出次品数 X 的分布律.

6．设随机变量 X 的分布列见表 7-7，

表 7-7

X	0	1	2	3	4
P	0.1	0.1	a	0.3	0.2

求常数 a.

7．设随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} cx & 0\le x\le 2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

求：（1）常数 c 的值；

（2）ξ 落在 $(0.3,0.7)$ 内的概率；

（3）ξ 落在区间 $(-\infty,t)(t\in R)$ 内的概率.

8．设连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} a\cos x & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

（1）求系数 a；

（2）求分布函数 $F(x)$；

（3）求 $P\left\{-\dfrac{\pi}{3}\le\xi\le\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

9．已知标准正态分布函数为 $\Phi(x)$，则 $\Phi(-x)$ 的值等于（　　）

A. $\Phi(x)$　　B. $1-\Phi(x)$　　C. $-\Phi(x)$　　D. $\frac{1}{2}+\Phi(x)$

10．设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求 $P\{X<1.65\}$，$P\{1.65\le X<2.09\}$，$P\{X\ge 2.09\}$.

11．设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求 $P\{X<2.08\}$，$P\{X\ge -0.09\}$，$P\{|X|<1.96\}$.

12．设随机变量 $X\sim N(1,4)$，求 $P\{1<X\le 1.6\}$.

13．设随机变量 $X\sim N(0,0.6^2)$，求 $P\{X>0\}$，$P\{0.2<X<1.8\}$.

14．设 $X\sim N\left(70,10^2\right)$，求 $P\{X>72\},P\{|X-70|<20\}$.

第七节　随机变量的期望和方差

学习内容：随机变量的数字特征 —— 数学期望和方差.

目的要求：熟练掌握离散型随机变量和连续性随机变量的数学期望和方差的定义及其求法，会求离散型随机变量函数和连续性随机变量函数的数学期望和方差，熟练掌握数学期望和方差的性质及其计算公式.

重点难点：离散型随机变量的数学期望及其性质，连续性随机变量的数学期望种方差的计算公式，常见分布的方差以及方差的性质.

由前文内容可知，分布函数（或密度函数、分布列）给出了随机变量的一种最完全的描述. 因此，原则上讲，全面认识和分析随机现象就应当求出随机变量的分布，但是对许多实际问题来讲，要想精确地求出其分布是很困难的. 其实，通过对现实问题的分析，人们发现对某些随机现象的认识并不要求了解它们的确切分布，而只要求掌握它们的某些重要特征，这些特征往往更能集中地反映随机现象的特点. 例如要评价两个不同厂家生产的灯泡的质量，人们最关心的是谁家的灯泡使用的平均寿命更长些，而不需要知道其寿命的完全分布，同时还要考虑其寿命与平均寿命的偏离程度等，这些数据反映了灯泡寿命随机变量在某些方面的重要特征.

我们把刻画随机变量（或其分布）某些特征的确定的数值称为随机变量的数字特征.

本节主要介绍反映随机变量取值的集中位置、分散程度的数字特征 —— 数学期望和方差.

【案例】

甲、乙二人进行射击比赛，以 ξ 和 η 分别表示他们命中的环数，其分布列分别为

$$\xi\sim\begin{pmatrix}8 & 9 & 10\\ 0.3 & 0.1 & 0.6\end{pmatrix},\quad \eta\sim\begin{pmatrix}8 & 9 & 10\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\end{pmatrix}$$

试问谁的射击技术好些?

解　这个问题的答案并不是一眼看得出的. 这说明了分布列虽然完整地描述了离散型随机变量的概率特征，但是却不够“集中”地反映出它的变化情况，因此我们有必要找出一些量来更集中、更概括地描述随机变量，这些量多是某种平均值.

若在上述问题中，使两个射手各射击 N 枪，则他们打中靶的总环数大约是：

甲　$8\times 0.3N+9\times 0.1N+10\times 0.6N=9.3N$

乙　$8\times 0.2N+9\times 0.5N+10\times 0.3N=9.1N$

平均起来甲每枪射中 9.3 环，乙每枪射中 9.1 环，因此可以认为甲射手的射击水平要好些.

从平均命中的环数看，射手甲的射击水平显然高于乙的射击水平．同时我们也看到，这种反映随机变量取值的“平均数”，显然不是一般意义下的“算术平均数”，而是以随机变量的一切可能取的值与取值的概率乘积之和，它是一种加权平均数，其权重就是相应的概率．我们称这种加权平均数为随机变量的数学期望.

一、离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量 ξ 的分布列为 $P\{\xi = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots$．则称 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 ξ 的**数学期望（概率分布期望值或概率分布均值）**，简称期望或均值，记作 $E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$.

【期望值来源】“期望值”的概念是由光的波动说的提出者荷兰物理学家 C.惠更斯（1629—1695）首先提出的，他在著作《论赌博中的计算》中首次引入这个概念．对赌博来说，所谓的“期望值”，不一定是能得到的金额，而是将其赌资平均后的每次所能得到的数额.

例题 1 一个年级有 100 人，年龄组成为：17 岁的 2 人，18 岁的 2 人，19 岁的 30 人，20 岁的 56 人，21 岁的 10 人．求该年级学生的平均年龄.

解 $17 \times \dfrac{2}{100} + 18 \times \dfrac{2}{100} + 19 \times \dfrac{30}{100} + 20 \times \dfrac{56}{100} + 21 \times \dfrac{10}{100} = 19.7$

例题 2 设 ξ 服从二点分布，求 $E\xi$.

解 由于 ξ 的分布列为见表 7-8

表 7-8

ξ	0	1
p	$1-p$	p

则

$$E\xi = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

同理可以证明：

（1） $\xi \sim B(n,p)$ ，有 $E\xi = np$ ；

（2）设 $\xi \sim \pi(\lambda)$ ，有 $E\xi = \lambda$.

例题 3 已知在 100 件产品中，有 10 件次品，从中任意取 5 件，求次品数 ξ 的数学期望.

解 ξ 的概率分布为 $P\{\xi = K\} = \dfrac{C_{10}^{k} C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}, k = 0,1,\cdots,5$

由此算出概率分布律（见表 7-9）.

表 7-9

ξ	0	1	2	3	4	5
p_k	0.583	0.340	0.070	0.007	≈0	≈0

再由数学期望公式得

$$E(\xi)=0\times0.583+1\times0.340+2\times0.070+3\times0.007+4\times0+5\times0=0.501.$$

二、连续性随机变量的数学期望

设连续型随机变量ξ，其概率密度是$p(x)$，注意到$p(x)\mathrm{d}x$的作用与离散型随机变量中的p_k相类似，故有如下定义.

设连续型随机变量ξ的概率密度是$p(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)\mathrm{d}x$收敛，则称积分$\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x$为随机变量$\xi$的**数学期望**，记作$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x$.

例题 4　设ξ在$[a,b]$上服从均匀分布，求$E\xi$.

解　由于ξ的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & 其他\end{cases}$$

于是，

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{x}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a+b)$$

定理：设随机变量η为随机变量ξ的函数，即$\eta=f(\xi)$，这里$f(x)$为连续的实值函数，

（1）若ξ为离散型随机变量，其概率分布为$p(\xi=x_k)=p_k$，　$k=1,2,\cdots,$则

$$E\eta=E[f(\xi)]=\sum_{k=1}^{\infty}f(x_k)p_k$$

（2）若ξ为连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$，则

$$E\eta=E[f(\xi)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)p(x)\mathrm{d}x$$

例题 5　设随机变量的分布列见表 7-10，

表 7-10

ξ	1	2	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求$E\xi^2$.

解　$E\xi^2=1^2\times\dfrac{1}{2}+2^2\times\dfrac{1}{4}+3^2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$.

随机变量的数学期望具有下列重要性质：

（1）设C为常数，则有$E(C)=C$；

（2）设ξ是一个随机变量，C是常数，则有$E(C\xi)=CE(\xi)$；

（3）设ξ,η是两个随机变量，则有$E(\xi+\eta)=E(\xi)+E(\eta)$；

（4）设ξ,η是相互独立的随机变量，则有$E(\xi\eta)=E(\xi)\cdot E(\eta)$，这一性质可以推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情况.

以上性质不论对离散型随机变量还是连续型随机变量，都成立.

例题 6　设ξ的分布列见表 7-11，

表 7-11

ξ	-1	0	1	2
p	0.3	0.2	0.4	0.1

求：$E(2\xi+1)$ $E(\xi^2-2)$．

解　$E(2\xi+1)=2E\xi+1=2[(-1)\times 0.3+0\times 0.2+1\times 0.4+2\times 0.1]+1=1.6$

$E(\xi^2-2)=E\xi^2-2=[(-1)^2\times 0.3+0^2\times 0.2+1^2\times 0.4+2^2\times 0.1]-2=-0.9$

三、随机变量的方差

先从例子说起．有一批灯泡，知其平均寿命是$E(\xi)=1000(\mathrm{h})$，但仅由这一指标，我们还不能判定这些灯泡的质量好坏．事实上，有可能其中绝大部分灯泡的寿命都在 950～1500h；也有可能其中大约一半是高质量的，它们的寿命大约有 1300h，而另一半的质量却很差，其寿命大约只有 700h．为了评定这批灯泡质量的好坏，还需要进一步考察灯泡的寿命ξ与均值$E(\xi)=1000$的偏差程度．若偏离程度小，说明这批灯泡的质量比较稳定，从这个意义上讲，我们认为质量较好，否则就认为质量较差．由此可见，研究随机变量与其均值的偏离程度也是十分必要的．那么，究竟用怎样的量去度量这个偏离程度呢？容易看到$E\{|\xi-E(\xi)|\}$能度量随机变量ξ与其均值$E(\xi)$的偏离程度，但由于上式带有绝对值，运算不方便，因此，通常用量$E\left\{\left[\xi-E(\xi)\right]^2\right\}$来度量随机变量$\xi$与其均值$E(\xi)$的偏离程度.

设ξ是一个随机变量，$E(\xi)$是其数学期望，若$E\left\{\left[\xi-E(\xi)\right]^2\right\}$存在，则称它为$\xi$的**方差**，记为$D(\xi)$，即$D(\xi)=E\left\{\left[\xi-E(\xi)\right]^2\right\}$，显然$D(\xi)\geq 0$．方差的算术平方根称为标准差或均方差，即

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{E\left\{\left[\xi-E(\xi)\right]^2\right\}}$$

按定义，随机变量ξ的方差表达了ξ的取值与其数学期望的偏离程度．若ξ取值比较集中，则$D(\xi)$较小；反之，若ξ取值比较分散，则$D(\xi)$较大．因此，$D(\xi)$是衡量ξ取值的分散程度的一个尺度.

对于离散型随机变量ξ，其分布列为$P\{\xi=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$，则

$$D(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[x_k-E(\xi)\right]^2 p_k$$

对于连续型随机变量ξ，其概率密度函数为$p(x)$，则

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(\xi)\right]^2\cdot p(x)\mathrm{d}x$$

由数学期望的性质可以证明，随机变量ξ的方差还可以按下列公式计算

$$D(\xi)=E\left(\xi^2\right)-\left[E(\xi)\right]^2$$

例题 7　设ξ服从二点分布，求$D(\xi)$.

解　由于ξ的分布列见表 7-12,

表 7-12

ξ	0	1
p	$1-p$	p

显然有

$$E(\xi)=0\times(1-p)+1\times p=p\text{.}\quad E(\xi^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

则

$$D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2=p-p^2=p(1-p)$$

例题 8　设随机变量ξ在区间(a,b)上服从均匀分布，其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求$E(\xi)$，$D(\xi)$.

解　数学期望为

$$E(\xi)=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}$$

即数学期望位于区间的中点.

$$E(\xi^2)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$$

方差为

$$D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

即服从均匀分布的随机变量ξ的数学期望和方差分别为$E(\xi)=\dfrac{a+b}{2}$，$D(\xi)=\dfrac{1}{12}(b-a)^2$.

例题 9　设随机变量ξ的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0\leq x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求$E(\xi)$，$D(\xi)$.

解　$E(\xi)=\int_{-1}^0 x(1+x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x=0$　$E(\xi^2)$

$$=\int_{-1}^0 x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$$

于是得

$$D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2=\frac{1}{6}.$$

同理可推得：

（1）设$\xi\sim B(n,p)$，则$D(\xi)=np(1-p)$；

（2）设$\xi\sim \pi(\lambda)$，则$D(\xi)=\lambda$；

（3）设$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$E(\xi)=\mu$， $D(\xi)=\sigma^2$.

这就是说，正态随机变量的概率密度中的两个参数μ和σ^2分别就是该随机变量的数学期望和方差，σ为其标准差．因而正态随机变量的分布完全可以由它的数学期望和方差所确定.

随机变量的方差具有下列重要性质：

（1）设C是常数，则$D(C)=0$；

（2）设ξ是随机变量，C是常数，则有$D(C\xi)=C^2D(\xi)$；

（3）设ξ，η是两个相互独立的随机变量，则有$D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$.

这一性质可以推广到任意有限多个相互独立的随机变量之和的情况.

以上性质不论对离散型随机变量，还是对连续型随机变量都成立.

例题 10 设$E(\xi)=-3$． $E(\xi^2)=11$，求$E(2-4\xi)$ $D(2-4\xi)$.

解 $E(2-4\xi)=2-4E\xi=2-4(-3)=14$

$$D(\xi)=E\xi^2-E^2\xi=11-(-3)^2=2 \qquad D(2-4\xi)=(-4)^2D\xi=16\times 2=32$$

【统计与概率、数学的区别】

概率和统计像一对性格迥异的兄弟，概率是理想主义的“文艺青年”；统计是务实精干的“普通青年”．概率喜欢提出很多“假设”和“近似”；统计则只顾着搜集数据、分析数据，寻找数据中隐藏的秘密．实践证明，当高度互联的群体的数量达到一定程度时，群体特征便会涌现出来，这些特征是群体中的任何个体都不具备的．比如，大量水滴汇成河水、海水，便会产生让水滴“感到陌生”的新特征——漩涡和波浪．概率与统计“两青年”只有联合起来，才能掌握河流或大海的运动规律.

数学有定义、有公理，然后不断往下推理就行了，是演绎过来的，不需要做实验．每个人得到的数学结果，只有对和错两种可能，有些人觉得进行数学学习与计算比较容易，是因为它们觉得数学不需要做实验，一支笔一张纸就够了.

统计呢？统计是研究数据的一门学问，收集数据然后分析数据，再做一个归纳或总计，然后从数据中挖掘一些信息．挖掘出的信息就因人而异了，有的人可以得到很好的结果，有的人就得不出什么有用的信息，就看如何去归纳和总结．其实，统计归纳出的结论，不像数学那样有“对或不对”的说法，只有“好或不好”的说法，即结论跟实际是否是相符合，符合的程度如何．对一个实际问题用统计方法给出回答，这个回答只有好或坏之分（越接近实际情况越好），没有对错之分，这是统计和数学的一个差别.

简单地说，数学的思维方式是演绎，而统计的思维方式是归纳，二者有着本质的区别．有的统计学家就说，美国大学的统计系很少与数学联系在一起，除非这个学校规模很小．他们认为统计与数学完全是两件事．但应该从两方面看，它的另一方面是：统计是以数学为工具的，要把统计知识学好、用好，数学功底是至关重要的.

习题 7-7

1．一批产品中有一、二、三等品及废品四种，相应比例分别为60%，20%，10%及10%，

若各等级产品的价值分别为 6 元，4.8 元，4 元及 0 元，求产品的平均价值.

2．设随机变量 ξ 的分布列为见表 7-13.

表 7-13

ξ	-2	0	2
p	0.4	0.3	0.3

求：$E\xi$，$E\xi^2$，$E(3\xi^2+5)$.

3．测出两批手表的时间准度误差（以整秒计）分布列分别见表 7-13 和表 7-14.

表 7-13　甲批

ξ	-1	0	1
p	0.1	0.8	0.1

表 7-14　乙批

η	-2	-1	0	1	2
p	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

试问甲、乙两批手表哪批时间准度较好？

4．$E(\xi)=-5$．$E(\xi^2)=16$，求 $E(3-5\xi)$，$D(3\xi-2)$，$D(4-6\xi)$.

5．若随机变量 ξ 服从二项分布，且 $E(\xi)=2.4$，$D(\xi)=1.44$，求二项分布的参数 n 和 p.

6．若 $\xi\sim B(3,\frac{2}{5})$，求 $E(\xi),D(\xi),D(5\xi)$.

7．设设连续型随机变量 ξ 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}3x+2 & 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E\xi$，$D\xi$.

第八节　概率统计初步测试题

一、选择题

1．若事件 A 和 B 相互独立，则有（　　）.

A．$AB=\varnothing$　　B．$P(A+B)=P(A)+P(B)$

C．$P(AB)=P(A)$　　D．$P(A|B)=P(A)$

2．10 个彩票中有一个中奖，无放回顺序抽取，每次取一个，则第二次抽到“有”的概率是（　　）.

A．$\frac{1}{10}$　　B．$\frac{2}{10}$　　C．$\frac{1}{9}$　　D．$\frac{2}{9}$

3．若（　　）成立，则 A 和 B 互为对立事件.

A．$AB=\varnothing$　　B．$P(A+B)=P(A)+P(B)$

C．$P(A)+P(B)=1$　　D．$AB=\varnothing 且 A+B=\Omega$

4．设 $X\sim B\left(n,\frac{1}{3}\right)$，则 $P\{X=3\}:P\{X=4\}=$（　　）.

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{8}{n-3}$　　D. $\frac{4}{n-3}$

5．设随机变量 X_1, X_2 都服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $E\left(X_1-X_2\right)$ 和 $D\left(X_1-X_2\right)$ 应为（　　）.

A. $0,0$　　B. $0,2\sigma^2$　　C. $2\mu,0$　　D. $2\mu,2\sigma^2$

6．设 $Y=aX+b$，其中，X 是随机变量，a 和 b 是常数，则（　　）成立.

A. $E(Y)=aE(X)+b, D(Y)=aD(X)+b$

B. $E(Y)=aE(X)+b, D(Y)=a^2D(X)+b^2$

C. $E(Y)=aE(X)+b, D(Y)=D(X)+b^2$

D. $E(Y)=aE(X)+b, D(Y)=a^2D(X)$

7．设 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $P(a\leq x\leq b)=$（　　）.

A. $\Phi(b)-\Phi(a)$　　B. $\Phi(b-\mu)-\Phi(a-\mu)$

C. $\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$　　D. $\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma^2}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma^2}\right)$

二、填空题

1．某射手的射击命中率为 p，独立射击 4 次，则

（1）恰好射中了 3 次的概率为____________；

（2）至多射中了 3 次的概率为____________.

2．甲、乙两炮同时向一架敌机射击，已知甲炮的击中率是 0.5，乙炮的击中率是 0.6，甲、乙两炮都击中的概率是 0.3，则飞机被击中的概率为____________.

3．已知 $P(A)=0.6, P(B)=0.8, P(B\,|\,\overline{A})=0.2$，则 $P(A\,|\,B)=$____________.

4．掷两枚骰子，出现“点数和为偶数”的概率为____________.

5. 设随机变量 X 的分布列 $P\{X=k\}=\frac{k}{15}, k=1,2,3,4,5$，则 $P\left\{\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right\}=$____________.

6．设 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=6$，$D(X)=3.6$，则 $n=$____________.

7．当 X 与 Y 相互独立时，方差 $D(2X-3Y)=$____________.

三、解答题

1．假设有甲、乙两批种子，发芽率分别为 0.8 和 0.7，在这两批种子中各取一粒，求：

（1）两粒都发芽的概率；

（2）至少有一粒发芽的概率；

（3）恰有一粒发芽的概率.

2．某集体有 50 名成员，求其中至少有 2 人是同一天生日的概率.

3．某一车间里有 12 台车床，由于工艺上的原因，每台车床时常要停车．设每台车床停车（或开车）是相互独立的，且在任一时刻处于停车状态的概率为 0.3，计算在任一指定时刻里有 2 台车床处于停车状态的概率．

4．某用户从两厂家购进了一批同类型的产品，其中甲厂生产的占 60%，若甲、乙两厂产品的次品率分别为 5%和 10%，若从这批产品中任取一个，求其为次品的概率．

5．设连续型随机变量 x 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+B\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

（1）求常数 A 和 B；

（2）求随机变量 x 的概率密度；

（3）计算 $P\{1<X<2\}$．

【空手套利的庄家——大数定理的应用】

大数定理，指的是随机事件发生的频率会随着试验次数的不断增加趋向于它的概率．简单说来就是，试验次数越多，频率离概率越近，而且越稳定，这是概率论中最重要的定理之一．

下面让我们分析赌场的情况，看一看大数定理是怎么暗中帮助庄家赚到钱的．

我们要玩的是赌场里很流行的一个游戏——大转盘．游戏的道具是如图 7-17 所示的大转盘，转盘上有 38 个格子，格子里填写了 1—36 的数字和两个特殊数字 0 与 00．玩家的下注方有很多种，比如下注奇数，下注黑格子的数字，或下注某一个数字．这里需要特别说明的是，0 和 00 这两个数字不包含在任何赌注中，这两个数字是留给庄家的，也就是转盘的指针最终指向 0 或 00 时，庄家赢得所有的筹码．

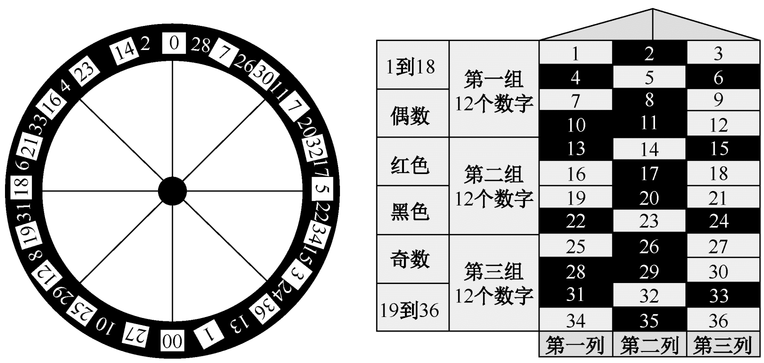


图 7-17

我们挑选赢的概率最大和最小的两种赌注．

赢的概率最小的赌注是下注某一个数字，当玩家下注某一个数字时，他赢的概率是 1/38，而此时庄家赢的概率是 2/38，很显然，玩家会输给庄家.

赢的概率最大的赌注是下注黑色（或红色）数字，当玩家下注黑色（或红色）数字时，他赢的概率是 18/38，这时，庄家赢的概率仍然是 2/38，很显然，玩家会战胜庄家.

很显然，上面的分析是错的.

因为玩家和庄家赢得是筹码，可不是概率．概率只是我们分析赌局的工具，玩家们真正关注的不是概率，而是所赢筹码（注：随机变量）的期望.

为了计算所赢筹码的期望，我们首先了解赌场里一个重要的常识——赔率.

赔率是赌场为每一个赌注设置的“赔钱比例”．比如，在 2015—2016 赛季英超联赛开始前，博彩公司为莱斯特城队开出的夺冠赔率是 1∶5000，这个比例的含义是，玩家用一英镑下注莱斯特城队夺冠，如果莱斯特城队最终夺冠，博彩公司会付给玩家 5000 英镑（含玩家下注的 1 英镑）．同时，阿森纳的夺冠赔率是 1∶3.5，即，下注阿森纳 1 英镑的玩家，即使赢了也只能得到 3.5 英镑．从这样的赔率可以看出，在英超联赛开始之前，博彩公司看好阿森纳夺冠，看衰莱斯特城队夺冠，这就是赔率的含义.

表 7-15 给出了大转盘中各类赌注的赔率，我们利用这些赔率来计算玩家和庄家所赢筹码的期望.

表 7-15

下注类型	庄家开出的赔率
红色（或黑色）	1∶2
偶数（或奇数）	1∶2
1～18（19～36）	1∶2
任意 12 个数字	1∶3
任意两行数字	1∶4
任意 4 个数字	1∶9
任意一行数字	1∶12
两个相邻数字	1∶18
一个数字	1∶36

假设玩家拿下一个筹码下注某一个数字, 他赢的概率是 1/38, 赢了可以得到 35 个筹码, 输的概率是 37/38，输了会输掉这一个筹码，所以玩家所赢筹码的期望是：

E（玩家下注某一数字时，玩家所赢筹码）=1/38×35+37/38×(-1)=-1/19=-0.0526.

与玩家相对的，庄家所赢筹码的期望是：

E（玩家下注某个数字时，庄家所赢筹码）=1/38×(-35)+37/38×(+1)=0.0526.

再如，若玩家下注黑色数字时，玩家和庄家所赢筹码的期望：

E（玩家下注黑色数字时，玩家所赢筹码）=18/38×(+1)+20/38×(-1)=-0.0526.

E（玩家下注黑色数字时，庄家家所赢筹码）=18/38×(-1)+20/38×(+1)=0.0526.

事实上，不论何种赌注，玩家所赢筹码的期望都是-0.0526，庄家所赢筹码的期望都是 0.0526.

至此，我们看清了大转盘的本来面目，它是一个典型的“零和博弈”，即庄家赢的筹码等于玩家输掉的筹码．平均意义上看，玩家每下注一个筹码，就会输掉 0.0526 个筹码，同

时，庄家就会赢得 0.0526 个筹码．0.0526 看起来很微小，这正是庄家想要的效果，玩家就像温水中的青蛙，沉浸在赌局当中，却不知道自己的钱正在像沙漏中的细沙一样，缓缓流进了庄家的钱袋.

在这个赌局中，庄家要做到稳赚不赔，就要满足大数定理实现的条件：实验次数足够多．因此，庄家会想方设法地吸引玩家不停地玩下去，玩家越是沉迷其中，庄家赚到的筹码也越多，这就是庄家空手套利的秘密.

第九节　应用实训

一、电路的可靠性[独立性应用，见本模块第一节]

问题解决　设事件 B_i 表示元件 A_i（$i=1,\cdots,5$）能正常工作，若系统能正常工作，则事件 B 当且仅当下面四个事件之一发生时发生：

$$B_1B_2,\quad B_4B_5,\quad B_1B_3B_5,\quad B_2B_3B_4$$

$$B = B_1B_2 \cup B_4B_5 \cup B_1B_3B_5 \cup B_2B_3B_4$$

从而利用概率的加法公式，有

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B_1B_2 \cup B_4B_5 \cup B_1B_3B_5 \cup B_2B_3B_4)\\ &= P(B_1B_2) \cup P(B_4B_5) \cup P(B_1B_3B_5) \cup P(B_2B_3B_4)\\ &\quad - P(B_1B_2B_4B_5) - P(B_1B_2B_3B_5) - P(B_1B_2B_3B_4)\\ &\quad - P(B_1B_3B_4B_5) - P(B_2B_3B_4B_5) - P(B_1B_2B_3B_4B_5)\\ &\quad + P(B_1B_2B_3B_4B_5) + P(B_1B_2B_3B_4B_5) + P(B_1B_2B_3B_4B_5)\\ &\quad + +P(B_1B_2B_3B_4B_5) - P(B_1B_2B_3B_4B_5)\end{aligned}$$

由事件的独立性知，事件积的概率等于事件概率的积，因此可得

$$P(B) = 2P^2 + 2P^3 - 5P^4 + 2P^5$$

这就是系统能正常工作的概率.

案例评价　这个案例的知识点是概率的加法公式和事件的独立性，将电路系统进行分解，利用这些知识点就可计算出系统能正常工作的概率．即使其中的每个电子元件能正常工作的概率不同，也可以同样进行计算.

二、汽车车门高度设计问题 [正态分布的应用]

问题解决　设公交车门高为 h，该地区乘客的身高为随机变量 X，则，$X \sim N(1.75, 0.05^2)$.

根据要求 $P(x>h) \leqslant 0.5\%$，即 $P(x<h) > 0.095$，而

$P(x<h) = \Phi(\dfrac{h-1.75}{0.05}) > 0.995$，查表得 $\dfrac{h-1.75}{0.05} > 2.58$，即 $h > 1.879$

也就是说车门高度设计大于 1.879m 即可满足要求.

案例评价　正态分布是常见的分布, 应用时注意将一些事件转化为数学语言而后求解, 一般正态分布的随机变量要注意转化为标准正态分布的随机变量，即随机变量的标准化.

三、销售中的概率问题[随机变量函数分布的应用]

在商品销售中用概率统计方法进行销售利润预测并给出相应销售策略是常用的方法.

问题提出 某办公用品零售店出售计算机和打印机两种商品, 两种机器日销售量是随机变量, 表 7-16 给出了两种机器各种可能销售量情况的概率.

表 7-16

计算机 / 打印机	0	1	2	3	4
0	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01
1	0.02	0.05	0.06	0.02	0.01
2	0.01	0.02	0.1	0.05	0.05
3	0.01	0.01	0.05	0.1	0.1
4	0.01	0.01	0.01	0.05	0.15

① 如果该店每售出一台计算机可获利 \$100，每售出一台打印机可获利 \$50，是定义一个表示每日总利润的的随机变量，并给出该随机变量的取值范围.

② 求一个离散型概率分布用于计算每日可能的总利润的概率.

③ 一天总利润大于 \$300 的概率是多少？

问题解决 ① 该店每日售出的计算机和打印机的数量都是随机变量，分别用 X、Y 来表示，它们的取值为 $0 \le x \le 4$，$0 \le y \le 4$．由于售出一台计算机和一台打印机分别可获利 \$100 和 \$50，因而可用 $z = 100x + 50y$ 来表示该店每日的总利润．它是一个随机变量，取值范围是 $0 \le Z \le 600$.

② 上面给出的每日总利润 Z 是一个离散型随机变量, 根据两种机器各种可能销售情况的概率表，我们可以计算出 Z 的分布（见表 7-17）.

表 7-17

Z	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
P	0.03	0.02	0.04	0.06	0.05	0.07	0.13	0.07	0.07	0.11	0.1	0.1	0.15

③ 一天总利润大于等于 \$300 的概率为

$$p(z \ge 300) = 0.13 + 0.07 + 0.07 + 0.11 + 0.1 + 0.1 + 0.15 = 0.73$$

四、调查问卷的真实性[全概率公式的应用]

问卷调查中（例如调查学生中进行大型网游的比例、一群人中参加赌博的比例等），往往由于调查者对真实情况的隐瞒而不能得到真实的调查结果，本案例提供了一个简单的方法用以解决调查者对真实情况的隐瞒情况.

问题提出 组织者设计了以下方案来调查人群中参加过赌博活动的概率 p，被调查者只需回答其中一个问题.

问题 1：你是否男性？

问题 2：你是否参加过赌博活动？

至于回答哪一个问题，由被调查者经事先的抽签决定．被调查者事先在一个只装有红

球、白球的袋子里摸出一球（红球的比例是已知的），看过颜色后放回，若摸出白球则回答1，若摸出红球则回答2.被调查者无论是回答1还是回答2，只需在印有问题1、问题2的问卷上对应是或否的方框内打钩，然后将答卷放入密封的投票箱内．由于抽签和答卷都是在无人的房间内进行，被调查者比较容易确信他（她）不会因为参加这个调查而泄露个人信息．当有较多人参加调查后，打开投票箱进行统计.

问题解决　设从袋中摸出红球的概率是P_0，A和B分别表示摸到红球、白球的事件，则$P(A)=P_0$，$P(B)=1-P_0$．又共收到n张答卷，其中k张答“是”，C表示答卷中回答“是”的事件，则$P(C)=\frac{k}{n}$，而$P(C)=P(AC)+P\quad(BC)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$，又$P(C|B)=\frac{1}{2}$，$P(C|A)$=参加过赌博活动的人在总调查人数中所占的比例=$p$，因此

$$\frac{k}{n}=\frac{1}{2}(1-P_0)+P_0P$$

解得

$$P=\frac{2k-n+np_0}{2nP_0}$$

案例评价　像这类敏感问题的社会调查，参照此方法进行社会分析，往往能得到比较真实的数据.

五、维修人员的最佳配置问题

问题求解　按第一种方法，设$A=$“设备发生故障时不能及时维修”，$A_i=$“第i人维护的20台中发生故障不能及时维修”（i=1,2,3,4).

则80台中发生故障不能及时维修的概率为

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)\geq P(A_1)=\sum_{K=2}^{20}P_{20}(K)$$

因为　$n=20$　　$P=0.01$　　$\lambda=0.2$，由泊松逼近公式，有

$$\sum_{K=2}^{20}P_{20}(K)\approx\sum_{K=2}^{\infty}P_{20}(K)\approx\sum_{K=2}^{\infty}\frac{(0.2)^K}{K!}e^{-0.2}=0.01752$$

即

$$P(A)\geq 0.018752$$

按第二种方法，设$B=$“设备发生故障时不能及时维修”.

因为n=20，$P=0.01$，λ=0.8，由泊松逼近公式知80台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P(B)=\sum_{K=4}^{80}P_{80}(K)\approx\sum_{K=4}^{\infty}P_{80}(K)\approx\sum_{K=4}^{\infty}\frac{(0.8)^K}{K!}e^{-0.8}=0.00908$$

案例评价　从本案例的计算结果可以看出，在后一种情况下，尽管任务重了，平均每人维护约27台，但工作效率不仅没有降低，反而提高了.

第十节　释疑问答

问题 1 概率论研究的前提、对象是什么？概率的概念如何理解？

大量的观察和实验是前提.

在日常生活中时刻发生着意想不到的事情. 一些被认为绝对不可能发生的事情发生了，而被认为一定会发生的事情最终却没有发生的情况时有所见. 也许这就是人生多彩的原因吧！

当然，也有一些只要具备一定的条件就必然会发生的事情存在. 例如，放开拿行李的手后，行李必然会掉在地上；眼睛闭上后，便看不见外面的情况；等等.

然而，也有一些我们无法预测的事情——即使具备了一定的条件，但因为有着其他几种因素的影响而导致结果的不确定，只能用偶然来形容. 概率论的研究对象正是这种偶然现象.

实际无法确定是否会发生的事情的起因也有一定的规律，这便是概率论的思考方法. 有人认为“没有规律可循，预测也就无从谈起了吧”. 但这只是短期观察的情况，如果一个现象进行反复观察及试验后，我们便能慢慢地发现其中的规律存在.

概率可以说是从这种无数次的反复观察及试验中得出的比例（相对频率）. 虽然概率的数值也能通过计算得到，但这必须是以无数次的观察及试验作为前提的.

问题 2　无论确信有多么正确，误差是必然存在的，对吗？

对.

比如，掷骰子时，控制了手的高度、投掷方向、投掷力度、桌子的硬度、温度、空气湿度、空气的流向等所有条件就一直掷出 1 点了吗?虽然也有科学家很认真地进行了挑战，但结果是否定的.

也就是说，即使正确预测了某些物理量，但最终还是会出现误差，而且，无论发明多么先进的观测设备，其本身产生误差是必然现象.

因此，完全杜绝偶然现象是不可能的，必然现象亦然. 偶然与必然之间不存在哪个是真实的问题，它们之间的各种不同的关系，产生了各种自然现象以及社会现象.

也许有人会对偶然是必然存在的这一事实感到遗憾. 但是，如果事先知道了自己的一生是怎样的，那么，也许就会失去生活下去的毅力了吧. 我们的人生离不开梦想与希望，用自己的努力来回报自己，这样的乐趣才是最难能可贵的，这些都是因为存在着偶然.

问题 3　怎样理解条件概率的概念？

设 A 和 B 是两个事件, 且 $P(A)>0$, 则称 $P(BlA) = P(AB)/P(A)$为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率. 相应地，把 $P(B)$称为无条件概率.

若事件 A 已经发生，则为使 B 也发生，实验结果必须是既在 A 中又在 B 中的样本点，即此点必属于 AB. 因为已知 A 已发生，故 A 成为计算条件概率 $P(B/A)$新的样本空间，称为缩减的样本空间.

因此，计算条件概率有两种方法：

① 在缩减的样本空间 A 中求事件 B 的概率，就得到 $P(B/A)$；

② 在样本空间 S 中，先求 $P(AB)$和 $P(A)$，再按定义计算 $P(B/A)$.

问题 4　随机变量与普通函数的差异.

随机变量是基本事件的函数，它有以下特点：

① 其定义域不一定是数集；

② 在试验之前不能确切地预知随机变量取什么值；

③ 随机变量的取值有一定的概率.

综上三点，随机变量与函数有着本质的差别. 随机变量概念的产生是概率论史上的重大事件，引入随机变量后，对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究转化为对随机变量及取值规律的研究，使人们可以利用数学分析的方法对随机试验的结果进行广泛而深入的研究.

问题 5　举例说明随机变量的实际意义.

举例：据资料记载，一个化名莫雷的赌徒曾经靠一个骰子游戏赚了很多钱，游戏的玩法是：连续掷骰子 4 次，如果出现至少一个六点，则莫雷赢；反之，莫雷输.

要弄清楚为什么莫雷总是赢，就要计算一下双方的概率. 要计算掷骰子 4 次至少出现一个 6 点的概率，可以用逆向思维，计算掷 4 次没有任何一次出现 6 点的概率，再用 1 减去算出的概率即可. 由于每次掷骰子都是彼此独立的，因此

P(莫雷赢)=1-P(掷 4 次没有任何 1 次出现六点)

=1-P(第一次没有出现 6 点)×P(第二次没有出现 6 点)×P(第 3 次没有出现 6 点)×P(第 4 次没有出现 6 点)

=1-(5/6)×(5/6)×(5/6)×(5/6)

=0.518

相对地，

$$P(\text{莫雷输})= (5/6)\times(5/6)\times(5/6)\times(5/6)=0.482$$

莫雷赢得赌局的概率（见表 7-18）总是大于对手，所以莫雷可以靠这个赌局赚到钱，对吗？

表 7-18

赌局结果	概率	莫雷赢得的筹码（随机变量 X）
莫雷赢	0.518	+1（赢得 1 两黄金）
莫雷输	0.482	-1（输掉 1 两黄金）

不对 !因为赌徒赚的可不是概率, 是真金白银, 我们忘记了赌局上最重要的东西 —— 筹码.

在莫雷的赌局中，双方的筹码是对等的，各为 1 两黄金，也就是说，莫雷与对手各拿出 1 两黄金作为筹码，如果出现了 6 点，莫雷拿走对手 1 两黄金，如果没出现 6 点莫雷送给对手 1 两黄金.如上表格所示，我们设定了一个关联关系 —— 赌局结果与莫雷赢得的筹码之间的关联，莫雷赢的 1 两黄金的概率是 0.518，输掉 1 两黄金的概率是 0.482. 如果将筹码的单位去掉，便可以表示成“ +1 ”对应的概率是 0.518，“ -1 ”对应的概率是 0.482.

在概率论中莫雷赢得的筹码就是一个随机变量 X. 根据 $\boldsymbol{X}$ 的取值和对应的概率，可以算出 X 的期望

$$E(X)=0.518\times(+1)+0.482\times(-1)=0.036$$

由此，我们可以得出结论：莫雷每一局所赢筹码的期望是 0.036 两黄金.

问题 6　“考试的结果为正态分布是件好事”这种说法正确吗？

不正确.

一般来说，多个因素共同作用的现象的概率分布都为正态分布．正态分布是数学家、物理学家高斯在考虑如何处理观察天体时得到的数据的误差时发现的.

“正态”在英语中为“normal”，不是因为某种特殊原因，而是由于多种偶然因素共同作用所造成的结果的原因，因此，表示为“普通”的意思．但是，虽说是普通但并非是理想的．某次考试的分数用统计的方法来看是趋近于正态分布的，但是理想的是全体学生都为满分的结果．因此，认为“考试的结果为正态分布是件好事”这样的想法有点荒谬，作为教师，应该考虑的问题是教学方法或是学习方法中存在哪些问题而导致学生没有的满分.

问题 7　伯努利概型只考虑只有两种可能结果的试验，对吗？

对.

但有些试验的结果虽然不止两个，但如果我们只关心试验中的某一事件是否发生，则也可以将其化为伯努利试验．例如，掷一颗骰子，我们只关心是否出现 6 点；进行射击试验，我们只关心是否命中靶子等都可以看成伯努利试验.

伯努利试验是一种很重要的数学模型，在实际问题中具有广泛的应用，其特点是：事件 A 在每次试验中的概率均为 p，且不受其他各次试验中 A 是否发生的影响.

【数学技术与应用】　统计的若干应用

（一）现代企业的 6σ 管理法

6σ 概念作为品质管理概念，是由摩托罗拉公司于 1986 年提出，通用电气公司于 20 世纪 90 年代发展起来的．6σ 管理是总结了全面质量管理的成功经验，提炼了其中流程管理技巧的精华和最行之有效的办法，成为一种提高企业业绩与竞争力的管理模式．该管理法在摩托罗拉、通用电气、戴尔、惠普、西门子、索尼、东芝、华硕等众多跨国企业的实践证明是卓有成效的．为此，国内一些部门和机构在国内企业大力推行 6σ 管理法，引导企业开展 6σ 管理.

6σ 管理法是一种统计评估法，核心是追求零缺陷生产，防范产品责任风险，降低成本，提高生产率和市场占有率，提高顾客满意度和忠诚度．6σ 管理法既着眼于产品、服务质量，又关注过程的改进．“σ”是希腊文的一个字母，在统计学上用来表示标准偏差值，用以描述总体中的个体离均值的偏离程度，测量出的 σ 表征着诸如单位缺陷、百万缺陷或错误的概率性，σ 值越大，缺陷或错误就越少．6σ 是一个目标，这个质量水平意味的是所有的过程和结果中，99.99966%是无缺陷的．也就是说，做 100 万件事情，其中只有 3.4 件是有缺陷的，这几乎趋近到人类能够达到的最为完美的境界．6σ 管理法关注过程，特别是企业为市场和顾客提供价值的核心过程．因为过程能力用 σ 来度量后，σ 越大，过程的波动越小，过程以最低的成本损失、最短的时间周期、满足顾客要求的能力就越强．6σ 理论认为，大多数企业在 3σ～4σ 间运转，也就是说每百万次操作失误在 6210～66800，这些缺陷要求经营者以销售额在 15%～30%的资金进行事后的弥补或修正，而如果做到 6σ，事后弥补的资金将降低到约为销售额的 5%.

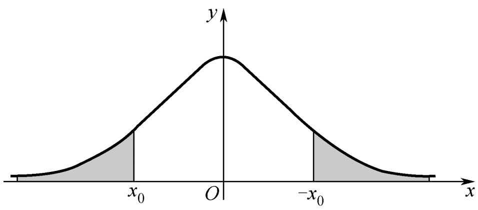
统计数据是实施 6σ 管理的重要工具，以数字来说明一切，所有的生产表现、执行能力等，都量化为具体的数据，成果一目了然．决策者及经理人可以从各种统计报表中找出问题在哪里，真实掌握产品不合格情况和顾客抱怨情况等，而改善的成果，如成本节约、利

润增加等，也都以统计资料与财务数据为依据.

（二）统计与战争

日本是“ 二战 ”中唯一的原子弹受害国，但未必知道“ 统计 ”与它的关系. 当时美国想登陆日本，但日本在海岸线布置了很多地雷，美国不敢轻易登陆，于是就想找一种方法破雷. 欧洲有一种飞机投炸弹的方法，但效果不好，一位叫安德森的统计学者设计了另外一种方法，但不知道这种方法破雷效果如何，不能直接派兵去试. 于是他做了一个计算机模拟，发现那个效果不好，最后美国决定用原子弹. 如果没有安德森，也许美国会直接派兵，那将会有很多伤亡.

附录 A　标准正态分布数值表



$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \quad (x \geq 0) \quad \varphi(-x)=1-\varphi(x)$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767

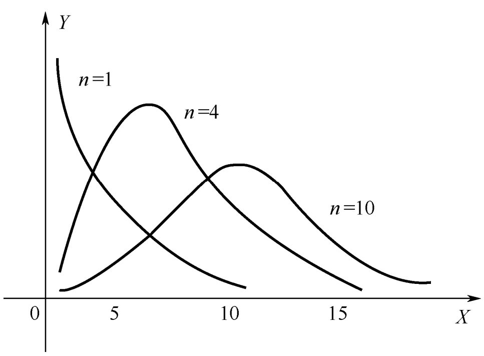
续表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

注：本表最后一行自左至右依次是 $\varphi(3.0)$、…、$\varphi(3.9)$的值

附录 B　x^2 分布数值表

α / df	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00004	0.00016	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.09	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.884	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997



附录 C　常用积分公式

（一）含有 $ax+b$ 的积分（$a\neq 0$）

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

2. $\int (ax+b)^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{1}{a(\mu+1)}(ax+b)^{\mu+1}+C$（$\mu\neq -1$）

3. $\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|)+C$

4. $\int \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2\ln|ax+b|\right]+C$

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)}=-\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax+b)}=-\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

7. $\int \frac{x}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}(\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b})+C$

8. $\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^3}(ax+b-2b\ln|ax+b|-\frac{b^2}{ax+b})+C$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)^2}=\frac{1}{b(ax+b)}-\frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

（二）含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

10. $\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

11. $\int x\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

12. $\int x^2\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{105a^3}(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{15a^3}(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{ax+b}+C$

15. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C & (b>0)\\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C & (b<0)\end{cases}$$

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}}=-\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}-\frac{a}{2b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

17. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

18. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

（三）含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

（四）含有 $ax^2+b(a>0)$ 的积分

22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}x + C & (b>0) \\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}x+\sqrt{-b}}\right| + C & (b<0) \end{cases}$

23. $\int \frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+b\right| + C$

24. $\int \frac{x^2}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

25. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax^2+b)} = \frac{1}{2b}\ln\frac{x^2}{\left|ax^2+b\right|} + C$

26. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax^2+b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

27. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(ax^2+b)} = \frac{a}{2b^2}\ln\frac{\left|ax^2+b\right|}{x^2} - \frac{1}{2bx^2} + C$

28. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^2} = \frac{x}{2b(ax^2+b)} + \frac{1}{2b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

（五）含有 $ax^2+bx+c\ (a>0)$ 的积分

29. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C & (b^2<4ac) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C & (b^2>4ac) \end{cases}$

30. $\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$

（六）含有 $\sqrt{x^2+a^2}\ (a>0)$ 的积分

31. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C_1 = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$

33. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$

34. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$

35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

36. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C$

38. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C$

39. $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

40. $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

41. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3} + C$

42. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

43. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2+a^2} + a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C$

44. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

（七）含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0)$ 的积分

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{|x|}\operatorname{arch}\frac{|x|}{a} + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$

47. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$

48. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

50. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}\mathrm{d}x = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

51. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|} + C$

52. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

53. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

54. $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3}{8}a^4\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

55. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3} + C$

56. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

57. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{|x|} + C$

58. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

（八）含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 的积分

59. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

60. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

61. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

62. $\int \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$

63. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

64. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C$

65. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|} + C$

66. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

67. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

68. $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a} + C$

69. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$

70. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

71. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{a^2-x^2}+a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

72. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

（九）含有 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}$ $(a>0)$ 的积分

73. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

74. $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

75. $\int\frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

76. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

77. $\int\sqrt{c+bx-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{2ax-b}{4a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

78. $\int\frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

（十）含有 $\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的积分

79. $\int\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+(b-a)\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x-b|})+C$

80. $\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C$

81. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C\quad(a<b)$

82. $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x=\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C\quad(a<b)$

（十一）含有三角函数的积分

83. $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

84. $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

85. $\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$

86. $\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

87. $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C$

88. $\int \csc x \mathrm{d}x = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$

89. $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

90. $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

91. $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$

92. $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

93. $\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

94. $\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

95. $\int \sin^n x \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \mathrm{d}x$

96. $\int \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \mathrm{d}x$

97. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2} x}$

98. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2} x}$

99. $\int \cos^m x \sin^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{m+n}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x \mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x \mathrm{d}x$$

100. $\int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C$

101. $\int \sin ax \sin bx \mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$

102. $\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$

103. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2 > b^2)$

104. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

105. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}) + C \quad (a^2 > b^2)$

106. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

107. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\arctan(\frac{b}{a}\tan x) + C$

108. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x + a}{b\tan x - a}\right| + C$

109. $\int x\sin ax dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax + C$

110. $\int x^2\sin ax dx = -\frac{1}{a}x^2\cos ax + \frac{2}{a^2}x\sin ax + \frac{2}{a^3}\cos ax + C$

111. $\int x\cos ax dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x\sin ax + C$

112. $\int x^2\cos ax dx = \frac{1}{a}x^2\sin ax + \frac{2}{a^2}x\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax + C$

（十二）含有反三角函数的积分（其中 $a > 0$）

113. $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

114. $\int x\arcsin\frac{x}{a}dx = (\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4})\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2} + C$

115. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + C$

116. $\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$

117. $\int x\arccos\frac{x}{a}dx = (\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4})\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2} + C$

118. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + C$

119. $\int \arctan\frac{x}{a}dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + C$

120. $\int x\arctan\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(a^2 + x^2)\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}x + C$

121. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{6}x^2 + \frac{a^3}{6}\ln(a^2 + x^2) + C$

（十三）含有指数函数的积分

122. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$

123. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

124. $\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a^2}(ax - 1)e^{ax} + C$

125. $\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$

126. $\int xa^x dx = \frac{x}{\ln a}a^x - \frac{1}{(\ln a)^2}a^x + C$

127. $\int x^n a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} x^n a^x - \frac{n}{\ln a}\int x^{n-1} a^x \mathrm{d}x$

128. $\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$

129. $\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(b\sin bx + a\cos bx) + C$

130. $\int \mathrm{e}^{ax} \sin^n bx \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2n^2}\mathrm{e}^{ax}\sin^{n-1} bx(a\sin bx - nb\cos bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int \mathrm{e}^{ax}\sin^{n-2} bx\mathrm{d}x$

131. $\int \mathrm{e}^{ax} \cos^n bx \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2n^2}\mathrm{e}^{ax}\cos^{n-1} bx(a\cos bx + nb\sin bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int \mathrm{e}^{ax}\cos^{n-2} bx\mathrm{d}x$

（十四）含有对数函数的积分

132. $\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

133. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C$

134. $\int x^n \ln x \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1}) + C$

135. $\int (\ln x)^n \mathrm{d}x = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$

136. $\int x^m (\ln x)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}x^{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$

（十五）含有双曲函数的积分

137. $\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$

138. $\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$

139. $\int \mathrm{th}x\mathrm{d}x = \ln \mathrm{ch}x + C$

140. $\int \mathrm{sh}^2 x\mathrm{d}x = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + C$

141. $\int \mathrm{ch}^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + C$

（十六）定积分

142. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = 0$

143. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\mathrm{d}x = 0$

144. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$

145. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$

146. $\int_{0}^{\pi} \sin mx \sin nx\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} \cos mx \cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$

147. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$

$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$　（n为大于 1 的正奇数），$I_1 = 1$

$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$（$n$为正偶数），$I_0 = \frac{\pi}{2}$

附录 D　中学数学常用公式

一、代数

1. 绝对值

（1）定义

实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，规定为 $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

（2）绝对值有下列运算性质：

$V=\frac{1}{3}sh$　　$|-x|=|x|$　　$|x|=\sqrt{x^2}$

$|-x|=|x|\leq x\leq |x|$　　$|xy|=|x||y|$　　$\left|\frac{x}{y}\right|=\left|\frac{x}{y}\right|(y\neq 0)$

2. 指数

正整数指数幂：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n个}$；负整数指数幂：$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$；零指数幂：$a^0=1$

运算法则：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad (a^m)^n=a^{mn};\quad (ab)^n=a^nb^n;\quad \left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n};\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}(a\neq 0)$$

$$(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}(a\geq 0,b\geq 0);\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}(a\geq 0,b>0)$$

3. 对数

如果 $a^b=N(a>0,且a\neq 1)$，那么 b 称为以 a 为底 N 的对数，记作 $\log_a N=b$．当 $a=10$ 时，记作 $\lg N=b$，称之为常用对数；当 $a=\mathrm{e}$ 时，记作 $\ln N=b$，称之为自然对数.

对数有下列性质和运算法则：

性质：

$$a^{\log_a N}=N;\quad \log_a 1=0;\quad \log_a a=1;\quad \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

运算法则：

$$\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n;\quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n$$

$$\log_a m^n=n\log_a m;\quad \log_a m^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log_a m$$

4. 复数（形如 $a+bi,a,b\in R$）

（1）复数的三角函数式：$a+bi=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$；复数的指数式：$a+bi=r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}$

（2）复数的运算法则：

代数式：

加减法：$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

三角式：

设 $$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

则 $$z_1z_2=r_1r_2[(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则

$$z^n=r[(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\ (n\text{ 为整数})$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n})$$ 其中，n 是正整数，$k=0,1,2,\cdots.n-1$.

5. 数列

（1）等差数列.

通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$ ；前 n 项和公式：$s_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，或 $s_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$

（2）等比数列

通项公式：$a_n=a_1\bullet q^{n-1}$ ；前 n 项和公式：$s_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，或 $s_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$

（3）某些数列前 n 项和

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}\ ;\qquad 1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ;\qquad 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$$

6. 求和号 $\sum$ 及其运算

$\sum\limits_{k=1}^{n}k$ 表示依次取 $k=1,2,\cdots,n$ 并将它们全部加起来，即

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}$$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$ ；$\sum\limits_{k=1}^{n}ca_k=c\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ （c 为常数）；$\sum\limits_{k=1}^{n}c=nc$ （c 为常数）

7．二项式定理 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+C_n^nb^n$ 其中 $n,r\in N$

通项公式：$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$．二项式系数：C_n^r．二项式系数性质：$C_n^m=C_n^{n-m}$，即对称性.

当 n 为偶数时，$C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大. 当 n 为奇数时，$C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 且最大. 各项系数之和：$\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k=2^n$．

二、三角

1. 特殊角的三角函数值

函数 \ α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞
$\cot\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

2. 同角三角函数的基本关系式

（1）倒数关系：$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ $\quad\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$ $\quad\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$

（2）商的关系：$\sin\alpha/\cos\alpha=\tan\alpha$ $\quad\cos\alpha/\sin\alpha=\cot\alpha$

（3）平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ $\quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

3. 诱导公式

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha \quad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha \quad \tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$$

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$$

4. 两角和与差的三角函数公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\text{；}\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

5. 万能公式

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\quad \tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

6. 半角的正弦、余弦和正切公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\text{；}\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\text{；}\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

7. 三角函数的降幂公式

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}\text{；}\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

8. 二倍角的正弦、余弦和正切公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\text{；}\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\text{；}$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

9. 三角函数的和差化积公式和积化和差公式

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\qquad \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\qquad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\qquad \cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\qquad \sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$$

化 $a\sin x\pm b\cos x$ 为一个角的一个三角函数的形式　$a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\phi)$（其中 ϕ 角所在象限由 a,b 的符号确定，ϕ 角的值由 $\tan\phi=\frac{b}{a}$ 确定）

10. 三角形边角关系

（1）正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为三角形外接圆半径）

（2）余弦定理：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$　$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

三、几何

平面图形

名　称	符　号	周长 C 和面积 S
正方形	a —边长	$C=4a$　$S=a^2$
长方形	a和b —边长	$C=2(a+b)$　$S=ab$
三角形	a,b,c —三边长，h — a 边上的高， s —周长的一半（$s=\frac{a+b+c}{2}$） A,B,C —内角	$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C$ $=\frac{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}{2}$ $=a^2\sin B\sin C/2\sin A$
四边形	d,D —对角线长，α —对角线夹角	$S=\frac{Dd}{2}\sin\alpha$
平行四边形	a,b —边长，h — a 边的高　α —两边夹角	$S=ah=ab\sin\alpha$
菱形	a —边长　α —夹角　D —长对角线长　d —短对角线长	$S=\frac{Dd}{2}=a^2\sin\alpha$　S＝Dd/2
梯形	a,b—上下底长，h —高　m —中位线长	$S=\frac{a+b}{2}h=mh$
圆	r —半径　d —直径	$C=\pi d=2\pi r$　$S=\pi r^2=\pi d^2/4$
扇形	r —扇形半径　α —圆心角度数	$C=2r+2\pi r\times\frac{\alpha}{360}$　$S=\pi r^2\times\frac{\alpha}{360}$
圆环	R —外圆半径　r —内圆半径　D —外圆直径　d —内圆直径	$S=\pi(R^2-r^2)=\pi(D^2-d^2)/4$
椭圆	D —长轴　d —短轴	$S=\pi Dd/4$

立方图形

名称	符　号	面积 S 和体积 V
正方体	a —边长	$S=6a^2$　$V=a^3$
长方体	a —长　b —宽　c —高	$S=2(ab+ac+bc)$　$V=abc$
棱柱	S —底面积　h —高	$V=sh$
棱锥	S —底面积　h —高	$V=\frac{1}{3}sh$
棱台	S_1 和 S_2 —上、下底面积　h —高	$V=\frac{h}{3}\left[S_1+S_2+(S_1S_2)^{\frac{1}{2}}\right]$
圆柱	r —底半径　h —高　C —底面周长 $S_{底}$ —底面积, $S_{侧}$ —侧面积,　$S_{表}$ —表面积	$C=2\pi r$　$S_{底}=\pi r^2$　S 侧=Ch $S_{表}=Ch+2S_{底}$　$V=S_{底}h=\pi r^2h$
直圆锥	r —底半径　h —高	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$
圆台	r —上底半径　R —下底半径　h —高	$V=\pi\frac{h}{3}(R^2+Rr+r^2)$
球	r —半径　d —直径	$V=\frac{4}{3}\pi r^2=\frac{1}{6}\pi d^3$

四、平面解析几何

1. 直线

（1）直线斜率

直线与 ox 轴的交角 α 的正切叫做直线的斜率，记作 k，$k=\tan\alpha$ $(0\leq\alpha<\pi)$.

已知直线上的任意两点 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$，那么这两条直线的斜率为：$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

（2）直线方程的公式

斜截式：$y=kx+b$；截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ $(a,b\neq 0)$；两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$（直线通过点 (x_0,y_0)，斜率为 k）；一般式：$Ax+By+C=0$.

（3）几种特殊的直线方程

平行于 ox 轴的直线方程：；$y=b$；当 $b=0$ 时，$y=0$ 是 ox 轴的方程；

平行于 oy 轴的直线方程：$x=a$；当 $a=0$ 时，$x=0$ 是 oy 轴的方程.

过原点 $(0,0)$ 的直线方程：$y=kx$.

（4）两条直线的关系

已知两条直线的方程分别为：$y=k_1x+b_1,y=k_2x+b_2$.

两条直线平行的条件是：$k_1=k_2$. 当 $b_1=b_2$ 时重合. 两条直线垂直的条件是：$k_1k_2=-1$.

（5）点到直线的距离

点 $P(x_1,y_1)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离：$d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

2. 二次曲线

（1）圆：标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$，圆心：(a,b)；半径：R

（2）椭圆：标准方程

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，中心 $O(0,0)$，顶点：$(a,0),(-a,0),(0,b),(0,-b)$

（3）抛物线：标准方程$(p>0)$：

$y^2=2px$，顶点$(0,0)$，开口向右；$y^2=-2px$，顶点$(0,0)$，开口向左；

$x^2=2py$，顶点$(0,0)$，开口向上；$x^2=-2py$，顶点$(0,0)$，开口向下.

（4）双曲线：

方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，焦点在 X 轴上；方程：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，焦点在 Y 轴上.

参 考 文 献

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学（第五版上、下）. 北京：高等教育出版社，2004.
[2] 王林全. 数学教育发展的国际视野. 广州：暨南大学出版社，2017.
[3] 宣明. 应用高等数学. 北京：国防工业出版社，2014.
[4] [美]齐斯 · 德芙林. 数学的语言. 桂林：广西师范大学出版社，2017.
[5] 金卫东. 高等应用数学. 苏州：苏州大学出版社，2017.
[6] 徐钰琨. 电工电子技术与实践. 北京：中国电力出版社，2016.
[7] [日]黑木哲德. 数学符号理解手册. 上海：学林出版社，2015.
[8] 刘春风. 高等数学. 北京：清华大学出版社，2014.
[9] [美]冯 · 诺依曼. 数学在科学与社会中的应用. 大连：大连理工大学出版社，2014.
[10] [英] Robert Matthems. 极简概率学. 广州：广东人民出版社，2017.
[11] 李伶. 应用数学. 北京：高等教育出版社，2014.
[12] 杨爱民. 线性代数. 北京：清华大学出版社，2014.
[13] 王贵水. 你一定要懂的数学知识. 北京：北京工业大学出版社，2015.
[14] 于继杰. 高等数学. 北京：中国电力出版社，2015.
[15] 陈晓龙. 大学数学应用. 北京：化学工业出版社，2015.
[16] 朱彩兰. 实用高等数学. 北京：高等教育出版社，2013.
[17] 康永强. 经济数学与数学文化. 北京：清华大学出版社，2015.
[18] 杜聪慧. 大学数学：微积分及其在经济管理中的应用. 北京：北京交通大学出版社.
[19] 胡超斌. 高等数学基础与应用. 武汉：华中科技大学出版社，2016.
[20] 庞坤. 高等数学教学中的问题驱动设计. 长沙：湖南师范大学出版社，2015.
[21] 于德明. 高职数学建模培训教程. 北京：清华大学出版社，2014.
[22] 张若军. 数学思想与文化. 北京：科学出版社，2014.
[23] 谢绪恺. 高数笔谈. 沈阳：东北大学出版社，2016.
[24] 曹亚萍. 高等数学. 南京：南京大学出版社，2015.
[25] 罗福坤. 汽车电工电子技术基础. 北京：机械工业出版社，2011.
[26] 张洪润. 电工电子技术. 北京：清华大学出版社，2014.
[27] 华成英. 模拟电子技术基础. 北京：清华大学出版社，2014.
[28] 唐义峰. 维修电工与实训. 北京：北京理工大学出版社，2014.
[29] [美]Jeffrey Liker. 丰田文化. 北京：机械工业出版社，2016.
[30] 郑友敬. 创新与思考. 北京. 中国社会科学出版社，2015.
[31] [日]三谷宏治. 商业模式全史. 南京：江苏凤凰文艺出版社，2016.
[32] 臧玲玲. 国际视野下的高校创业教育课程研究. 北京：中国社会科学出版社，2016.
[33] [日]小林正道. 概率. 统计. 上海：上海科学技术文献出版社，2014.
[34] 刘家春. 概率论与数理统计. 北京：人民邮电出版社，2015.
[35] 李帅. 大数据时代的概率统计学. 北京：清华大学出版社，2017.
[36] [英]斯科特著，张兰译. 数学史. 桂林：广西大学出版社，2001.
[37] 艾冬梅.MATLAB 与数学实验. 北京：机械工业出版社，2015.

[38] 江浩. 数学与军事. 大连：大连理工大学出版社，2016.
[39] 李海燕. 数学建模竞赛优秀论文选评. 北京：科学出版社，2016.
[40] 孙荣恒. 趣味随机问题. 北京：科学出版社，2004.
[41] [美]Luck Dormehl. 算法时代. 北京：中信出版社，2017.

反侵权盗版声明

举报电话：（010）88254396；（010）88258888
传　　真：（010）88254397
E-mail:　　dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市万寿路 173 信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036